

مقرر التحليل العددي

الفصل (5): الطرائق التكرارية لحلّ الجمل الخطية

2	مقدمة
4	1. طريقة جاكوبي
5	2. طريقة غاوس سايدل
6	3. دراسة تقارب الطريقتين السابقتين
9	4. طريقة جاكوبي لإيجاد القيم والأشعة الذاتية لمصفوفة متناظرة
11	1.4 اختيار الدليلين p و q في كل خطوة
11	2.4 تقارب طريقة جاكوبي
12	5. تمرينات

مقدمة

تُعطى الطريقة التكرارية لحلّ جملة معادلات خطية $AX = b$ (A مصفوفة قلوية) بمتتالية شعاعية تدرجية من النوع $X_{k+1} = BX_k + c$ و X_0 شعاع من $\mathbb{K}^n$. حيث B مصفوفة تتعلّق بالمصفوفة A و c شعاع يتعلّق بالمصفوفة B والشعاع b .

نفترض أنّنا بأسلوب ما أوجدنا مصفوفة B وشعاعاً c بحيث تكون $(I - B)$ قلوية، وكلّ حلّ للجملة $X = BX + c$ هو أيضاً حلّ للجملة $AX = b$. إن الجملة $X = BX + c$ هي التي تعطينا الطريقة التكرارية بـ أن نأخذ شعاعاً اختيارياً X_0 ونعـرف متتالية الأشـعة $(X_k)_{k \geq 0}$ بالعلاقة: $\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = BX_k + c$. هنا من الطبيعي القول أن الطريقة تتقارب إذا تقاربت المتتالية $(X_k)_{k \geq 0}$ من الحلّ المطلوب.

المبرهنة التالية تعطي ميزة أساسية لتقارب طريقة تكرارية.

مبرهنة (1):

الفضايا الثلاث التالية متكافئة:

1. الطريقة المعطاة بالعلاقة $X_{k+1} = BX_k + c$ متقاربة.

2. $\rho(B) < 1$.

3. يوجد تنظيم مصفوفي $\|\cdot\|$ يحقّق $\|B\| < 1$.

الإثبات

لا يمكن X حلّ للجملة $AX = b$. إن تقارب الطريقة التكرارية يكافئ تقارب المتتالية $(e_k = X_k - X)_{k \geq 0}$ من الصفر وذلك أياً كان X_0 . ولكن لدينا $e_k = B^k e_0$. $\forall k \in \mathbb{N}$. إن التكافؤ بين الفضايا الثلاث ينتج مباشرة من المبرهنة (4) من الفصل الثالث.

ولكن باعتبار أنّه هناك عدد من الطرائق التكرارية لحلّ جملة خطية. كيف نختار الطريقة الأفضل؟ لتثبيت الأفكار نفترض أن b مصفوفة نظامية إذن لدينا

$$\|e_k\|_2 = \|B^k e_0\|_2 \leq \|B^k\|_2 \|e_0\|_2 \leq (\rho(B))^k \|e_0\|_2.$$

ففي هذه الحالة تكون الطريقة التكرارية أسرع (أي أن شعاع الخطأ e_k يسعى بـ سرعة أكبر نحو الصفر) كلما كان $\rho(B)$ أصغر.

في الحالة العام لدينا نتيجة مشابهة والمبرهنة التالية تؤكّد ذلك.

مبرهنة (2):

1. ليكن $\|\cdot\|$ نظيماً شعاعياً و X شعاع يحقق $X = BX + c$ ولتكن الطريقة التكرارية المعطاة

$$X_{k+1} = BX_k + c$$

بالعلاقة $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{\|X - X_0\|=1} \|X_k - X\|^{1/k} \right\} = \rho(B)$ عندها

2. ليكن $\|\cdot\|$ نظيماً مصفوفياً و X شعاع يحقق $X = BX + c = \widetilde{B}X + \widetilde{c}$ ولتكن الطريقتين

التكراريتين $X_{k+1} = BX_k + c$ و $\widetilde{X}_{k+1} = \widetilde{B}\widetilde{X}_k + \widetilde{c}$. نفرض أن $\rho(B) < \rho(\widetilde{B})$ وأن

$X_0 = \widetilde{X}_0$ عندها: أي - أك - ان $0 < \varepsilon$ يوجد عدد طبيعي l_ε بحيث

$$k \geq l_\varepsilon \Rightarrow \sup_{\|X_0 - X\|=1} \left\{ \frac{\|\widetilde{X}_k - X\|}{\|X_k - X\|} \right\}^{1/k} \geq \frac{\rho(\widetilde{B})}{\rho(B) + \varepsilon}$$

الإنبات

1. ليكن $\|\cdot\|$ هو التنظيم المصفوفي المشتق من التنظيم الشعاعي، عندها يكون لدينا

$$(\rho(B))^k = \rho(B^k) \leq \|B^k\| = \sup_{\|e_0\|=1} \|B^k e_0\|.$$

إذن

$$\rho(B) \leq \sup_{\|e_0\|=1} \|B^k e_0\|^{1/k} = \|B^k\|^{1/k}$$

والجزء الأول من المبرهنة ينتج من المبرهنة (5) من الفصل الثالث.

2. ليكن $0 < \varepsilon$ ، يوجد عدد طبيعي l_ε بحيث

$$k \geq l_\varepsilon \Rightarrow \sup_{\|e_0\|=1} \|B^k e_0\|^{1/k} \leq \rho(B) + \varepsilon.$$

ليكن e_1 شعاعاً يحقق

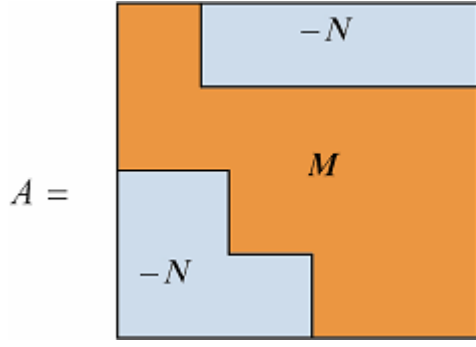
$$\|f_0\| = 1 \wedge \|\widetilde{B}^k f_0\|^{1/k} = \|\widetilde{B}^k\|^{1/k} \geq \rho(\widetilde{B}).$$

وبالتالي

$$\frac{\|\widetilde{B}^k f_0\|^{1/k}}{\|B^k f_0\|^{1/k}} \geq \frac{\rho(\widetilde{B})}{\rho(B) + \varepsilon}$$

ومنه

$$k \geq l_\varepsilon \Rightarrow \sup_{\|X_0 - X\|=1} \left\{ \frac{\|\widetilde{X}_k - X\|}{\|X_k - X\|} \right\}^{1/k} \geq \frac{\rho(\widetilde{B})}{\rho(B) + \varepsilon}.$$



تعتمد دراسة الطرائق التكرارية على مسألتين هامتين:

- تقارب الطريقة ذات المصفوفة B الذي يكافئ أن $\rho(B) < 1$.

- إذا كان لدينا طريقتين تكراريتين فإن الطريقة الأسرع هي الطريقة التي يكون نصف قطرها الطيفي $\rho(B)$ هو الأصغر (المبرهنة (5) من الفصل الثالث).

فيما يلي نورد وصفاً لبعض الطرائق التكرارية المعروفة.

1. طريقة جاكوبي

لتكن لدينا جملة المعادلات $AX = b$. نفترض أنه بإمكاننا كتابة $A = M - N$ حيث M مصفوفة قلوية وسهلة القاب (مثلاً قطرية أو مثلثية). في الحقيقة لا نحتاج إلى قاب المصفوفة ولكن إلى حلّ جملة معادلات مصفوفتها M). لدينا إذن

$$AX = b \Leftrightarrow MX = NX + b \Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}b$$

إن المعادلة الأخيرة من الشكل $X = BX + c$ ، فيمكننا ربطها بالطريقة التكرارية التالية $(X_0 \in \mathbb{K}^n) \wedge (\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = BX_k + c)$

حيث

$$B = M^{-1}N = I - M^{-1}A \text{ و } c = M^{-1}b$$

ما يوضح أن $I - B$ قلوية.

في الحقيقة تؤول العملية، عملياً، إلى حلّ الجملة $MX_{k+1} = NX_k + b, k \geq 0$. ولكن كيف نختار المصفوفتين M و N ؟

أول ما يتبادر إلى الذهن هو اختيار M و N منفصلتين أي $m_{ij} \in \{a_{ij}, 0\}$ حسب (i, j) وهو ما يمكن تمثيله بالرسم التوضيحي إلى اليسار.

وباعتبار أننا نحتاج إلى قاب المصفوفة M ، فإن المصفوفات القطرية هي الأسهل على الإطلاق، لذلك نعتمد الخيار $M = D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ وذلك بشرط $\forall i, a_{ii} \neq 0$ الذي يضمن أن M قلوية. وعلى ذلك يكون

$$n_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \text{ و } m_{ij} = a_{ij} \delta_{ij}$$

ملاحظة (1):

تُكتب طريقة جاكوبي على النحو التالي

$$(X_0 \in \mathbb{K}^n) \wedge (\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = JX_k + c)$$

حيث $J = D^{-1}N = I - D^{-1}A$ هي مصفوفة هذه الطريقة التي تُسمى أيضاً مصفوفة جاكوبي.

من الناحية الفعلية تُجرى الحسابات على النحو التالي:

$$\text{نضع } X_k = (x_k^i)_{1 \leq i \leq n} \text{ و } X_{k+1} = (x_{k+1}^i)_{1 \leq i \leq n}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{k+1} &= -a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \dots - a_{1n}x_n^k + b_1 \\ a_{22}x_2^{k+1} &= -a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k + b_2 \\ &\vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1}^{k+1} &= a_{n-1,1}x_1^k - \dots - a_{n-1,n-2}x_{n-2}^k - a_{n-1,n}x_n^k + b_{n-1} \\ a_{nn}x_n^{k+1} &= -a_{n1}x_1^k - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^k + b_n \end{aligned}$$

نلاحظ أنه لحساب كل مركبة x_{k+1}^i من X_{k+1} نحتاج إلى $(n-1)$ مركبة من X_k ، وعليه يلزمنا الاحتفاظ دوماً بـ $2n$ قيمة في الذاكرة: n قيمة لمركبات X_k و n قيمة لمركبات X_{k+1} .

2. طريقة غاوس سايدل

بعد الملاحظة الأخيرة تظهر أهمية استخدام المركبات المحسوبة من X_{k+1} في حساب المركبات التي تليها وذلك باعتماد طريقة الحساب التالية:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{k+1} &= -a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \dots - a_{1n}x_n^k + b_1 \\ a_{22}x_2^{k+1} &= -a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k + b_2 \\ &\vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1}^{k+1} &= a_{n-1,1}x_1^{k+1} - \dots - a_{n-1,n-2}x_{n-2}^{k+1} - a_{n-1,n}x_n^k + b_{n-1} \\ a_{nn}x_n^{k+1} &= -a_{n1}x_1^{k+1} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n \end{aligned}$$

يُبين المخطط السابق أنه بعد حساب x_1^{k+1} لم نعد نحتاج إلى x_1^k في حساب x_2^{k+1} ، كما في الطريقة الأولى، بل إلى x_1^{k+1} . يُمكننا، إذن، وضع قيمة x_1^{k+1} مكان x_1^k . وكذلك الأمر بالنسبة لحساب بقية المركبات وبالتالي لا نحتاج إلى الاحتفاظ بأكثر من n قيمة في الذاكرة لإتمام الحساب.

هذا يُعرف طريقة تكرارية جديدة نسميها طريقة غاوس سايدل.

فإذا وضعنا $M = (m_{ij})$ مع $m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}$ و $N = M - A$ ، فإن الطريقة السابقة تُكتب بشكلها المصفوفي على النحو التالي:

$$X_{k+1} = M^{-1}NX_k + M^{-1}b, k \geq 0$$

وباعتبار أن $\forall i, a_{ii} \neq 0$ فإن M قلوبة.

نسُمي المصفوفة $L = M^{-1}N$ مصفوفة غاوس سايدل.

كما رأينا في البداية فإن أهمية هذه الطريقة تأتي من أنها تحتاج لنصف الذاكرة التي تحتاجها طريقة جاكوبي وهذا مهم جداً وخاصة في حالة الجمل ذات الأبعاد الكبيرة.

ملاحظة (2): (مهمة)

لتكن الجملة $AX = b$ ، نضع $A = D - E - F$ حيث

$$d_{ij} = a_{ij} \delta_{ij}$$

$$e_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases}$$

$$f_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i < j \\ 0 & i \geq j \end{cases}$$

عندها فإن مصفوفة جاكوبي تُكتب على النحو $J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$.

أما مصفوفة غاوس سايدل فتكتب على النحو $L = (D - E)^{-1}F = I - (D - E)^{-1}A$.

3. دراسة تقارب الطريقتين السابقتين

مبرهنة (3):

لتكن A مصفوفة هرمتية معرفة موجبة من الشكل $A = M - N$ مع M قلوبة. عندها إذا كانت المصفوفة الهرمتية $(M^* + N)$ معرفة موجبة فإن $\rho(M^{-1}N) < 1$.

الإثبات

إن المصفوفة $(M^* + N)$ هرمتية وذلك لأن $A^* = A$ وبالتالي لدينا

$$M^* + N = A^* + N^* + N = A + N + N^* = M + N^* = (M^* + N)^*$$

إن التطبيق $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ : v \rightarrow \sqrt{v^* A v}$ يعرف نظيماً شعاعياً وذلك بسبب أن A هرمتية معرفة موجبة.

سوف نثبت أن $\|M^{-1}N\| < 1$ بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|$ ، وهذا كاف لإثبات المبرهنة. لدينا

$$\|M^{-1}N\| = \|I - M^{-1}N\| = \sup \{\|v - M^{-1}Nv\|; \|v\| = 1\}$$

نضع $w = M^{-1}Av$ لدينا

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= 1 - v^* A v - w^* A v + w^* A w \\ &= 1 - w^* M w - w^* M w + w^* M w \\ &= 1 - w^* (M^* + N) w \end{aligned}$$

ومنه

$$\|v\| = 1 \Rightarrow \|v - M^{-1}Av\| < 1$$

ذلك لأن $(M^* + N)$ هرمتية معرفة موجبة، ولدينا

$$v \neq 0 \Rightarrow w = M^{-1}Nv \neq 0 \Rightarrow w^* (M^* + N) w > 0$$

من جهة أخرى، التطبيق $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R} : v \rightarrow \|v - M^{-1}Nv\|$ مستمر فهو يبلغ حده الأعلى على $C = \{v \in \mathbb{C}^n, \|v\| = 1\}$ وبالتالي يوجد v_0 من $\mathbb{C}^n$ بحيث $\|v_0\| = 1$ ويحقق

$$\|M^{-1}N\| = \sup \{\|v - M^{-1}Nv\|; \|v\| = 1\} = \|v_0 - M^{-1}Nv_0\| < 1$$

وهذا يكمل إثبات المبرهنة.

مبرهنة (4):

لتكن لدين الجملة $AX = b$ حيث A مصفوفة ثلاثية الأقطار أي $a_{ij} = 0$ $|i - j| > 1$.

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_2 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

عندها فإن $\rho(L) = \rho(J)^2$ وبالتالي فإن الطريقتين تتقاربان معاً وتتباعدان معاً. ولكن طريقة غاوس سايديل أسرع بالتقارب.

لنثبت أولاً النتيجة التالية:

ليكن μ عدداً سلمياً غير معدوم. نعرف المصفوفة

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} b_1 & \mu^{-1}c_1 & & \\ \mu a_2 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mu^{-1}c_{n-1} \\ & & \mu a_n & b_n \end{pmatrix}$$

عندها

$$\forall \mu \neq 0, \det(A(\mu)) = \det(A)$$

في الحقيقة، لتكن المصفوفة القطرية

$$Q(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & & & \\ & \mu^2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \mu^n \end{pmatrix}$$

يمكننا التحقق بسهولة أن $A(\mu) = Q(\mu)A(1)Q(\mu)^{-1}$. ومنه النتيجة المطلوبة.

فإذا فرغنا A على النحو $A = D - E - F$ فإن هذه النتيجة تقتضي المساواة التالية:

$$\forall \mu \neq 0, \det(A(\mu)) = \det(A - \mu E - \mu^{-1}F) = \det(A)$$

إن القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي $J = D^{-1}(E + F)$ هي مجموعة جذور كثير الحدود

$$P_J(\lambda) = \det(D^{-1}(E + F) - \lambda I)$$

وهي بالتالي جذور كثير الحدود $Q_J(\lambda) = \det(\lambda D - E - F) = \det(D)P_J(\lambda)$.

بشكل مماثل نجد أن القيم الذاتية لمصفوفة غاوس سايدل هي مجموعة جذور كثير الحدود

$$P_L(\lambda) = \det((D - E)^{-1}F - \lambda I)$$

وهي بالتالي جذور كثير الحدود $Q_L(\lambda) = \det(\lambda D - \lambda E - F) = \det(D - E)P_L(\lambda)$. ومنه:

$$\begin{aligned} Q_L(\lambda^2) &= \det(\lambda^2 D - \lambda^2 E - F) \\ &= \det(\lambda^2 D - \lambda E - \lambda F) \\ &= \det(\lambda(\lambda D - E - F)) \\ &= \lambda^n \det(\lambda D - E - F) \\ &= \lambda^n Q_J(\lambda) \end{aligned}$$

وعليه، إذا كانت α قيمة ذاتية غير معدومة لـ L فإن $\alpha^{\frac{1}{2}}$ و $-\alpha^{\frac{1}{2}}$ قيم ذاتية لـ J . ومن جهة أخرى، إذا كانت α قيمة ذاتية غير معدومة لـ J (وبالتالي $-\alpha$ قيمة ذاتية أيضاً) فإن α^2 قيمة ذاتية لـ L . وهذا يُثبت المبرهنة.

4. طريقة جاكوبي لإيجاد القيم والأشعة الذاتية لمصفوفة متناظرة

تُستخدم هذه الطريقة عندما يكون علينا حساب القيم والأشعة الذاتية لمصفوفة A متناظرة. نعلم في هذه الحالة أنه توجد مصفوفة متعامدة O بحيث $OAO^t = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ حيث (λ_i) هي القيم الذاتية للمصفوفة A . وتشكل أعمدة المصفوفة O أساساً متعامداً نظامياً من الأشعة الذاتية.

إن من أبسط الأساليب لحساب القيم الذاتية لمصفوفة هو إيجاد متتالية من المصفوفات (P_k) بحيث تتقارب المتتالية $P_k^{-1}AP_k$ ، بشكل ما، نحو $\text{diag}(\lambda_i)$.

ما يهمنا في الحقيقة أن يكون $\lim_{k \rightarrow \infty} (P_k^{-1}AP_k)_{ij} = 0$ عندما $i \neq j$ و $\lim_{k \rightarrow \infty} (P_k^{-1}AP_k)_{ii} = \lambda_i$.

بالنسبة لطريقة جاكوبي، نطلق من $A_1 = A$ ، ونوجد متتالية $(\Omega_k)_{k \geq 1}$ من المصفوفات المتعامدة البسيطة بحيث تتقارب متتالية المصفوفات

$$A_{k+1} = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k = {}^t(\Omega_1 \Omega_2 \cdots \Omega_k) A (\Omega_1 \Omega_2 \cdots \Omega_k)$$

نحو المصفوفة $\text{diag}(\lambda_i)$. كما يُمكن أن نأمل من المتتالية $O_k = \Omega_1 \Omega_2 \cdots \Omega_k$ أن تتقارب من مصفوفة O أعمدها هي أساس متعامد نظامي من الأشعة الذاتية لـ A .

نأخذ إذن $A_1 = A$ ، ونوجد انطلاقاً من A_k بحيث يكـون $A_{k+1} = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k$ ويكـون العنصران $(A_{k+1})_{pq}$ و $(A_{k+1})_{qp}$ معدومين بالنسبة لدليلين p و q سيتم اختيارهما لاحقاً.

للتقليل من الرموز سوف نضع مؤقتاً $A_k = A = (a_{ij})$ و $A_{k+1} = B = (b_{ij})$ و $\Omega_k = \Omega$.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \cos \theta & & \sin \theta & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & -\sin \theta & & \cos \theta & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$$

مبرهنة (5):

لـ يكن p و q عدداً طبيعياً أن يحقّ أن $1 \leq p < q \leq n$ و θ عدد حقيقي. نعرف المصفوفة المبينة إلى اليسار.

1. إذا كانت A مصفوفة متناظرة، فإن $B = {}^t \Omega A \Omega$ أيضاً متناظرة وتحقق $\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$.
 2. إذا كان $a_{pq} \neq 0$ ، فإن توجد قيمة وحيدة لـ θ في المجموعة $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ بحيث يكون $b_{pq} = 0$. وهذه القيمة هي الحل الوحيد للمعادلة $\cotan 2\theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$ في المجموعة نفسها.
- ولدينا في هذه الحالة $\sum_{i=1}^n b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2$.

الإثبات

1. من السهل إثبات أن Ω متعامدة. وباعتبار أن التحويل المتعامد يحافظ على النظم $\|\cdot\|_E$ فإنه لدينا
- $$\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \|A\|_E^2 = \|{}^t \Omega A \Omega\|_E^2 = \sum_{i,j} b_{ij}^2$$
2. نلاحظ أن التحويل $A \rightarrow B = {}^t \Omega A \Omega$ بالذات نسبة للعناصر $--$ رالت $--$ في أدلتهم $--$ لا
- $(p,p), (p,q), (q,p), (q,q)$ يُعبر عنه بالعلاقة التالية التي يُمكن التأكد منها بحساب بسيط.

$$\begin{pmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{qp} & b_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

لدينا أولاً

$$a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2 = b_{pp}^2 + b_{qq}^2 + 2b_{pq}^2$$

ولكن

$$b_{pq} = b_{qp} = a_{pq} \cos 2\theta + \frac{a_{pp} - a_{qq}}{2} \sin 2\theta$$

فإذا عوضنا بقيمة θ المعطاة في المبرهنة (أي $\cotan \theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$) وجدنا أن $b_{pq} = b_{qp} = 0$

وبالتالي يصبح لدينا

$$a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2 = b_{pp}^2 + b_{qq}^2$$

وبما أن $b_{ii} = a_{ii}$ أي كان i مختلف عن p و q . فإن $\sum_{i=1}^n b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2$ وهذا يُكمل الإثبات.

ملاحظة (3):

1. إن المصفوفة Ω تمثل دوراناً بزاوية مقدارها θ في المستوي الشعاعي المولد بالـ شعاعين e_p و e_q من أشعة الأساس.

2. نلاحظ أيضاً أن العمودين الوحيديين الذين يتغيران جـ. راء التحويل ل $A \rightarrow B = \Omega A \Omega$ هم p و q . وبشكل أدق لدينا

$$\begin{cases} b_{ij} = a_{ij} & i \neq p, q \wedge j \neq p, q \\ b_{pj} = a_{pj} \cos \theta - a_{qj} \sin \theta & j \neq p, q \\ b_{qj} = a_{pj} \sin \theta + a_{qj} \cos \theta & j \neq p, q \\ b_{pp} = a_{pp} \cos^2 \theta + a_{qq} \sin^2 \theta - a_{pq} \sin 2\theta \\ b_{qq} = a_{pp} \sin^2 \theta + a_{qq} \cos^2 \theta + a_{pq} \sin 2\theta \\ b_{pq} = b_{qp} = a_{pq} \cos 2\theta + \frac{a_{pp} - a_{qq}}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

اختيار الدليلين p و q في كل خطوة

هناك أساليب عدة لاختيار الثنائية (p, q) في كل خطوة:

1. **طريقة جاكوبي التقليدية:** نختار p و q بحيث $|a_{pq}^k| = \max_{i \neq j} |a_{ij}^k|$. وفي هذه الحالة فـ إن هـ. ذا الاختيار يتعلق بالخطوة k .

2. **طريقة جاكوبي الدورية:** قد يكون البحث عن أكبر عنصر من العناصر غير القطرية في الطريقة السابقة مكلفاً. لذلك نعمل إلى إجراء عملية مسح شاملة للعناصر غير القطرية ونكتب هـ. هذه العملية نأخذ ثملاً الترتيب $(1, 2), \dots, (1, n), \dots, (2, 3), \dots, (2, n), \dots, (n-1, n)$.

3. **طريقة جاكوبي مع عتبة:** نعمل كما في طريقة جاكوبي الدورية ولكن نتجاهل الخطوات التي يكون فيها العنصر $|a_{pq}^k|$ أصغر من عتبة معينة $\delta > 0$. إذ لا معنى لأن نعد عناصر صغيرة بوجود عناصر أكبر منها بكثير.

تقارب طريقة جاكوبي

سوف نقبل بالمبرهنة التالية التي تؤكد تقارب طريقة جاكوبي التقليدية.

مبرهنة (6):

إن المتتالية $(A_k)_{k \geq 1}$ في طريقة جاكوبي التقليدية متقاربة ولدينا

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \text{diag} \left(\lambda_{\sigma(i)} \right)$$

حيث σ هو تبديل على المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$.

وإذا كانت القيم الذاتية للمصفوفة A متباينة مثني مثني فإن المتتالية $O_k = \Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_k$ في طريقة جاكوبي التقليدية تتقارب من مصفوفة O تتألف أعمدتها من أساس متعامد نظامي من الأشعة الذاتية.

5. تمارين البحث

التمرين الأول:

لـ تكن الطريقة التكرارية لحل جملة المعادلات $AX = b$ المعرفة بالعلاقة التدرجية
 $X_{k+1} = BX_k + c$. نفترض أن $\rho(B) = 0$ أثبت أن الطريقة تتقارب نحو الحل بعد عدد منته من
الخطوات.

الحل

ليكن X حلاً للجملة $AX = b$ فهو يحقق أيضاً المعادلة $X = BX + c$. ولكن باعتبار $\rho(B) = 0$
فإن كل القيم الذاتية للمصفوفة B معدومة وبالتالي فإن كثير الحدود المميز $\chi(B) = (-X)^n$
فحسب مبرهنة كايلى هاملتون نجد أن $B^n = 0$.
أصبح لدينا $0 = (X_0 - X) = B^n(X_0 - X) = X_n - X$ إذن $X_n = X$.

التمرين الثاني:

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ و $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- احسب الحل الصحيح للجملة $AX = b$.
- أوجد J مصفوفة جاكوبي الموافقة للجملة $AX = b$ واكتب العلاقة التدرجية التي تعرف هذه
الطريقة $X_{k+1} = JX_k + c$.
- احسب X_5 مع $X_0 = 0$ وقارنه بالحل الصحيح للجملة.

الحل

a. الحل الصحيح للجملة هو $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. لدينا $J = D^{-1}(E + F)$ إذن

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$X_5 = \begin{pmatrix} 0.97226 \\ 0.99075 \\ 1.9861 \end{pmatrix} .c$$

التمرين الثالث:

أعد التمرين السابق مع طريقة غاوس سايدل بدلاً من طريقة جاكوبي.

التمرين الرابع:

أثبت أن المصفوفة $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ معرفة موجبة وأن طريقة جاكوبي بالنسبة لهذه المصفوفة

غير متقاربة.

الحل

لدينا

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه $sp(J) = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{2} \right\}$ وبالتالي $\rho(J) = \frac{3}{2} > 1$ والطريقة متباعدة.

التمرين الخامس:

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a. احسب مصفوفة جاكوبي J ومصفوفة غاوس سايدل L الموافقتين لهذه المصفوفة.

b. أثبت أن $\rho(J) < 1 < \rho(L)$.

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c. أثبت أن $\rho(L) < 1 < \rho(J)$.

d. ماذا تستنتج؟

الحل

a. لدينا

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

من جهة أخرى

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b. لدينا $\chi_J(X) = -X^3$. إذن $\rho(J) = 0$. من جهة أخرى لدينا $\chi_L(X) = -X(X-2)^2$ ومنه $\rho(L) = 2$

c. لدينا $J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، نحسب القيم الذاتية فنجد $\text{sp}(J) = \left\{ 0, i \frac{\sqrt{5}}{2}, -i \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$ ومنه $\rho(J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$

من جهة أخرى لدينا $L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ومنه $\rho(L) = \frac{1}{2}$

d. نستنتج أننا لا يمكننا المقارنة بين طريقتي جاكوبي و غاوس سايدل في الحالة العامة.

التمرين السادس:

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة تحقق $\forall i, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ولتكن الجملة $AX = b$.

a. أثبت أن طريقة جاكوبي متقاربة بالنسبة لهذه الجملة.

b. أثبت أن طريقة غاوس سايدل متقاربة بالنسبة لهذه الجملة.

الحل

a. ليكن V شعاعاً ذاتياً لمصفوفة جاكوبي $J = D^{-1}(E + F)$ موافقاً للقيمة الذاتية λ . ولـ i_0 يكون

$$\lambda a_{i_0 i_0} = \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} \frac{v_j}{v_{i_0}} \quad \text{بحيث} \quad |v_{i_0}| = \max_i |v_i| \quad \text{عندها يكون} \quad JV = \lambda V \quad \text{وبشكل خاص}$$

$$|\lambda| = \frac{\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|}{|a_{i_0 i_0}|} < 1 \quad \text{ومنه}$$

b. ليكن V شعاعاً ذاتياً لمصفوفة غاوس سايدل $L = (D - E)^{-1} F$ موافقاً للقيمة الذاتية λ . وليكن i_0 بحيث $|v_{i_0}| = \max_i |v_i|$ عندها يكون $LV = \lambda V$ وبشكل خاص

$$\lambda \left(a_{i_0 i_0} + \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0 j} \frac{v_j}{v_{i_0}} \right) = \sum_{j=i_0+1}^n a_{i_0 j} \frac{v_j}{v_{i_0}}$$

ومنه

$$|\lambda| \leq \frac{\sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}|}{\left| a_{i_0 i_0} + \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0 j} \frac{v_j}{v_{i_0}} \right|} \leq \frac{\sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}|}{|a_{i_0 i_0}| - \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}|} < 1$$

ذاك لأن

$$|a_{i_0 i_0}| - \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}| > \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}|$$

التمرين السابع:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $y''(x) = f(x)$ على المجال $[0,1]$ م-ع $y(0)$ و $y(1)$ معطيين، ونود حلها بشكل تقريبي باستخدام طريقة الفروق المنتهية. فإذا كان $h = \frac{1}{n+1}$ و $x_i = ih$ من أجل $0 \leq i \leq n+1$ نضع $y_i = y(x_i)$ و $b_i = f(x_i)$. إن معادلة الفروق المنتهية لهذه المعادلة هي $\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f(x_i)$ وهي يُمكن وضعها بشكل مصفوفي على النحو التالي $AY = b$ حيث $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ و $b = {}^t(b_1, \dots, b_n)$

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. احسب القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي J بالنسبة لهذه الجملة.

b. استنتج نصف القطر الطيفي $\rho(J)$ وكذلك $\rho(L)$ بالنسبة لمصفوفة غاوس سايدل.

الحل

a. يمكننا التحقق بسهولة أن القيم الذاتي للمصفوفة

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

هي الجماعة $\left(\cos \frac{\pi i}{n+1} \right)$. وذلك بالبحث عن أشعة ذاتية من الشكل

$$V = {}^t (\sin \alpha, \sin 2\alpha, \dots, \sin n\alpha)$$

b. من الطلاب السابق نجد أن

$$\rho(J) = \max_i \left| \cos \frac{\pi i}{n+1} \right| = \left| \cos \frac{\pi}{n+1} \right| = |\cos \pi h|$$

وباعتبار أن $\rho(L) = \rho(J)^2$ فإن $\rho(L) = \cos^2 \pi h$.

التمرين الثامن:

لتكن المصفوفة A متناظرة ومعرفة موجبة. نضع $A = D - E - F$ كالمعتاد. نعرف الطريقة التكرارية التالية

$$(D - E)X_{k+\frac{1}{2}} = FX_k + b$$

$$(D - F)X_{k+1} = EX_{k+\frac{1}{2}} + b$$

اكتب الشعاع X_{k+1} على النحو التالي:

$$X_{k+1} = BX_k + c$$

وأعط المصفوفة B والشعاع c .

ملاحظة: هذه الطريقة نسخة معدلة من طريقة غاوس سايدل بحيث تعطي دوراً متوازناً لكل من E و F .

الحل

لدينا

$$B = (D - F)^{-1} E (D - E)^{-1} F$$

$$c = (D - F)^{-1} b + (D - F)^{-1} E (D - E)^{-1} b$$