

١. الاستقراء (الاستنتاج) الرياضي (mathematical induction)

إن كلمة induction كلمة لاتينية الأصل وتعني الوصول من الخاص إلى العام أو التعميم يكتسب هذا المبدأ أهميته من المنطق الرياضي وبالتحديد من العبارة المشهورة (إذا كان A فإن B) وإذا شئت الدقة انظر إلى الصف الثاني من الجدول التالي

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

وهذا يعني أن الصواب لا يؤدي إلى خطأ أبدا

لنفرض أن العبارة $P(n)$ هي احد العلاقات الرياضية التي تخص العدد n مثلا: $n(n+3)$ هو عدد زوجي ونحتاج إلى إثبات أن $P(n)$ عبارة صحيحة لكل الأعداد الطبيعية. سوف نستخدم للإثبات أسلوبا رياضيا مشهورا يطلق عليه الاستقراء الرياضي ويتلخص هذا الأسلوب في الاتي

١. نثبت صحة العلاقة عندما $n=1$
٢. نفترض أن العلاقة صحيحة لكل الأعداد الطبيعية n أي أننا نفترض أن $P(n)$ صحيحة لأي عدد صحيح n
٣. نستخدم العبارتين السابقتين لنثبت صحة $P(n+1)$.

مثال 1-1

اثبت صحة العبارة التالية

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

الحل

١. عندما $n=1$ فإن $1=1$ العبارة صحيحة
٢. نفرض صحة العبارة عند n أي نفرض صحة العبارة التالية: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$
٣. نثبت صحة العلاقة عند العدد الذي يلي n وهو العدد $(n+1)$

وهكذا فإن العبارة (1) صحيحة دائما

مثال 2-1

اثبت صحة العبارة التالية

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

الحل

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

١. عندما $n=1$ فإن العبارة صحيحة، لاحظ $\frac{1}{2}$
 ٢. نفرض صحة العبارة عند n أي أننا نسلم بصحة العبارة ونستخدم هذا الفرض في إثبات صحة العبارة من أجل $n+1$
 ٣. بما أن

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

إذن

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

مثال 3-1

اثبت صحة العبارة التالية

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الحل

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \text{ ذلك أن } n=1$$

١. واضح جدا صحة العبارة عند $n=1$ ذلك أن $n=1$
 ٢. نفترض صحة العبارة لكل قيم n
 ٣. سنستخدم الفرض الأخير لنثبت صحة العبارة عند كل قيم n

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

واضح انه كان بالإمكان الحصول على S_{n+1} بالتعويض عن كل n بالقيمة $n+1$
 وهذا يدل على صحة العبارة

مثال 4-1

$$V_n = 2^n + 1 \text{ فاثبت أن } V_0 = 2, V_1 = 3 \text{ وكان } V_{k+1} = 3V_k - 2V_{k-1}$$

الحل

$$V_0 = 2 = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2, \quad V_1 = 2^1 + 1 = 3,$$

$$V_2 = 3V_1 - 2V_0 = 3 \times 3 - 2 \times 2 = 2^2 + 1 = 5$$

١. مما سبق نستطيع أن نقول أن العبارة صحيحة للقيم $n = 0, 1, 2$ ٢. سنفرض صحة العبارة من أجل كل عدد طبيعي n ٣. سنثبت صحة العبارة من أجل $n+1$

$$V_{n+1} = 3V_n - 2V_{n-1} = 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) = 3 \times 2^n + 3 - 2^n - 2 = 2 \times 2^n + 1$$

مثال 5-1

اثبت صحة العبارة الآتية

$$S_k = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$$

الحل

$$S_1 = 1 \cdot 1 = 2! - 1, \quad S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5 = 3! - 1$$

$$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23 = 4! - 1$$

(١) مما سبق العبارة صحيحة للقيم 1, 2, 3

(٢) نفرض صحة العبارة من أجل k (٣) سنثبت صحتها من أجل $k+1$ لاحظ أن

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!$$

مثال 6-1

اثبت أن مجموع مكعبات أي 3 أعداد طبيعية متتالية يقبل القسمة على 9

الحل

سنضع صيغة رياضية للعبارة السابقة وهي

(١) للأعداد الطبيعية الأولى العلاقة صحيحة، أنظر $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ (٢) نفرض صحة العبارة من أجل k ونستخدم هذه العبارة بشكل أساسي في برهنة البند القادم(٣) سنبرهن صحة العبارة من أجل $k+1$ وهذا يعني أننا سنعوّض عن k من العبارة السابقة بـ $(k+1)$ أنظر

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 =$$

$$[(k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3] + 9k^2 + 9k + 27 = 9n + 9k^2 + 9k + 27$$

$$= 9(n + k^2 + k + 3)$$

مثال 7-1

إذا كان

$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

فاثبت أن A_n يقبل القسمة على 133

الحل

(١) عندما $n=0$ فإن $A_0 = 11^{0+2} + 12^{2 \cdot 0 + 1} = 133$ وهذا يقبل القسمة على 133(٢) نفرض صحة العبارة عند n أي أنه يمكن كتابة العدد A_n كما يلي:

$$A_n = 133k$$

(٣) سنثبت صحة العبارة للقيمة $n+1$

$$A_{n+1} = 11^{n+1+2} + 12^{2(n+1)+1} = 11^{n+3} + 12^{2n+3} = 11 \cdot 11^{n+2} + 12^2 \cdot 12^{2n+1}$$

$$= 11 \cdot 11^{n+2} + 144 \cdot 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+2} + 11 \cdot 12^{2n+1} + 133 \cdot 12^{2n+1}$$

$$= 11(11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133 \cdot 12^{2n+1} = 11 \cdot A_n + 133 \cdot 12^{2n+1}$$

$$= 11 \cdot 133k + 133 \cdot 12^{2n+1} = 133(11k + 12^{2n+1})$$

مثال 8-1

أثبت صحة العبارة التالية

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdots \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}$$

الحل

(١) عندما $n=0$ فإن $\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ فإن العبارة صحيحة(٢) نفترض صحة العبارة عند n

(٣) سنثبت صحة العلاقة كالتالي

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdots \cos 2^n \alpha \cdot \cos 2^{(n+1)} \alpha &= \frac{\sin 2^{n+1} \alpha \cdot \cos 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha} \\ &= \frac{2 \sin 2^{n+1} \alpha \cdot \cos 2^{n+1} \alpha}{2 \cdot 2^{n+1} \sin \alpha} = \frac{\sin 2^{n+2} \alpha}{2^{n+2} \sin \alpha} \end{aligned}$$

مثال 9-1

اثبت صحة العبارة الآتية

إذا كان

$$A_1 = \cos x, \quad A_2 = \cos 2x, \quad A_k = 2 \cos x A_{k-1} - A_{k-2}$$

فأثبت أن

$$A_n = \cos nx$$

الحل

(١) عندما $n=1,2$ فإن العلاقة تتحقق مباشرة لأن هذه القيم معطاة(٢) سنفرض العلاقة عند n وهذا يعني أن

$$A_n = \cos nx, A_{n-1} = \cos(n-1)x$$

(٣) سنتثبت صحة العبارة عند $n+1$ وذلك باستخدام العبارتين السابقتين

ولكن قبل كل ذلك نحدد ما الذي نريد الحصول عليه، إننا نريد الحصول على العلاقة

$$A_{n+1} = \cos(n+1)x$$

أنظر

$$A_{n+1} = 2\cos x \cdot \cos nx - \cos(n-1)x = \cos(n+1)x + \cos(n-1)x - \cos(n-1)x \\ = \cos(n+1)x$$

وهو المطلوب إثباته

طبعا لا حظ أن

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$$

مثال 10-1

أثبت صحة العبارة التالية

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}$$

الحل

(١) عندما $n=1$ فإن

$$\sin x = \frac{\sin \frac{1+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{1 \cdot x}{2} = \sin x$$

(٢) سوف نفرض صحة العبارة عند n أي أننا سنعتبر أن

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}$$

أمر صحيح وسنقوم بإستخدامه في خطواتنا اللاحقة

(٣) سنقوم بإثبات العبارة من أجل $n+1$ كالتالي
لاحظ أن

$$2\cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

سوف نستخدم العلاقة السابقة في البرهان كالتالي

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \sin(n+1)x = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2} + \sin(n+1)x = \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2} + 2\sin \frac{(n+1)}{2}x \cdot \cos \frac{(n+1)}{2}x = \\ &= \sin \frac{n+1}{2}x \left(\frac{\sin \frac{nx}{2} + \left[2\cos \frac{(n+1)}{2}x \cdot \sin \frac{x}{2} \right]}{\sin \frac{x}{2}} \right) = \\ &= \sin \frac{n+1}{2}x \left(\frac{\sin \frac{nx}{2} + \left[\sin \frac{(n+2)}{2}x - \sin \frac{x}{2} \right]}{\sin \frac{x}{2}} \right) = \\ &= \sin \frac{n+1}{2}x \left(\frac{\sin \frac{(n+2)}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \right) \end{aligned}$$

٢. المعاملات الخاصة بمفكوك ذي الحدين binomial coefficient

تعريف 1

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

إن هذه العلاقة تقابل عدد الطرق التي نضع بها n من الأشياء المختلفة في n من الأماكن مع أخذ الترتيب بعين الاعتبار

تعريف 2

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1}$$

وتقرأ توافق k من n

إن هذه العلاقة تقابل عدد الطرق التي نضع بها k من الأشياء المختلفة في n من الأماكن مع عدم أخذ الترتيب بعين الاعتبار

العلاقة 1 (العلاقة الأساسية)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

البرهان

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

لا حظ أن

$$n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

$$k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1 = k! , \quad (n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1 = (n-k)!$$

∴ فإن العلاقة ستصبح على الصورة التالية

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

العلاقة 2 (علاقة التناظر)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

الإثبات

ضع بدل كل k العبارة $n-k$ وستلاحظ أن الطرف الأيمن لن يتغير وذلك بالشكل التالي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

العلاقة 3 (علاقة الإدخال-الإخراج)

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

الإثبات

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

نستطيع من هذه العلاقة أن نستنتج بسهولة العلاقات التالية

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}, \quad \frac{1}{n} \binom{n}{k} = \frac{1}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

العلاقة 4

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k}$$

الإثبات

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{n-k-1} = \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k}$$

ومن هذه العبارة نستطيع ان نحصل على النتائج التالية:

$$(n-k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k}$$

العلاقة 5

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

الإثبات

من العلاقة 4 لدينا

$$(n - k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k} \quad (1)$$

من العلاقة 3 لدينا

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \quad (2)$$

بجمع (1) و (2) سنحصل على العبارة التالية

$$(n - k) \binom{n}{k} + k \binom{n}{k} = n \binom{n}{k} = n \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right]$$

وبقسمة الطرفين على n نحصل فوراً على العلاقة المراد إثباتها

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

حالات خاصة للتعامل مع التوافق أو مع معاملات مفكوك ذي الحدين

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ إذا كان } n < k \text{ فإن } (1)$$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad (2)$$

$$\binom{n}{n} = 1 \quad (3)$$

$$\binom{n}{1} = n \quad (4)$$

سنستخدم العلاقة 5 لنقوم بإثبات علاقته أخريين الأولى كالتالي:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} \\ &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} = \dots \end{aligned}$$

والثانية هي

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-2} + \\ &\binom{n-3}{k-3} = \dots \end{aligned}$$

بإمكاننا تعميم العلاقتين السابقتين كالتالي

العلاقة 6

$$\sum_{i=0}^n \binom{r+i}{i} = \binom{r+n+1}{n}$$

سنستخدم الاستنتاج الرياضي العلاقة 6 وذلك كالتالي

(١) عندما $n=1$ فإن

$$\sum_{i=0}^1 \binom{r+i}{i} = \binom{r+0}{0} + \binom{r+1}{1} = 1 + r + 1 = \binom{r+2}{1}$$

(٢) نفرض صحة العبارة عند n

(٣) سنثبت صحتها عند $n+1$ و قبل ذلك لابد أن نبين ما الذي نريد الحصول عليه وهو

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{r+i}{i} = \binom{r+n+2}{n+1}$$

لاحظ ان

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{r+i}{i} &= \sum_{i=0}^n \binom{r+i}{i} + \binom{r+n+1}{n+1} = \binom{r+n+1}{n} + \binom{r+n+1}{n+1} \\ &= \binom{r+n+2}{n+1} \end{aligned}$$

وذلك حسب العلاقة 5

العلاقة 7

أثبت صحة العبارة التالية

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

البرهان لاحظ الآتي

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{r} = \sum_{i=0}^{n-r} \binom{r+i}{r}$$

وذلك لان $\binom{i}{r} = 0$ عند كل قيم i التي تحقق العلاقة $i < r$ بعدها سنستخدم العلاقة 2 ثم نستخدم العلاقة 6

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{r} = \sum_{i=0}^{n-r} \binom{r+i}{r} = \sum_{i=0}^{n-r} \binom{r+i}{i} = \binom{r+n-r+1}{n-r} = \binom{n+1}{n-r} = \binom{n+1}{r+1}$$

تطبيق جميل للعلاقة 7

لو وضعت $r=1$ في العلاقة 7 فإن الأمر يصبح كالتالي

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{1} = \binom{0}{1} + \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \dots + \binom{n}{1} = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

وهذه ما هي إلا الصيغة المستخدمة لحساب مجموع الأعداد من 1 إلى n

انظر كيف سنستفيد من نفس العلاقة لحساب مجموع مربعات الأعداد من 1 إلى n

$$\begin{aligned}\sum k^2 &= \sum_{k=0}^n \left(2 \binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right) = 2 \sum_{k=0}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=0}^n \binom{k}{1} = 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n}{2} \\ &= 2 \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

العلاقة 8

أثبت صحة العبارة الآتية

$$\binom{n}{i} \binom{i}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{n-i}$$

الحل

$$\binom{n}{i} \binom{i}{m} = \frac{n!}{i! (n-i)!} \cdot \frac{i!}{m! (i-m)!} = \frac{n!}{m! (n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-i)! (i-m)!} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{n-i}$$

العلاقة 9 مفكوك ذي الحدين (Binomial theorem)

أثبت صحة العبارة الآتية

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

الحل سوف نستخدم الاستقراء الرياضي

(١) عندما n=1 فإن

$$\begin{aligned}(x+y) &= \binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot y + 1 \cdot x \cdot 1 = y + x = x + y\end{aligned}$$

(٢) نفرض صحة العبارة عند n وسنحاول استخدام نتائج الفرض في الخطوة القادمة

(٣) سنثبت صحة العلاقة من اجل n+1 وذلك كالتالي

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r \\ &= x \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r + y \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r+1} y^r + \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^{r+1} = \\ &= x^{n+1} + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} x^{n-r+1} y^r + y^{n+1} + \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} x^{n-r} y^{r+1} =\end{aligned}$$

$$x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} x^{n-r+1} y^r + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r-1} x^{n-r+1} y^r$$

طبعا نستطيع أن نلاحظ

$$x^{n+1} = \binom{n+1}{0} x^{n+1}, \quad y^{n+1} = \binom{n+1}{0} y^{n+1}$$

وسنكمل البرهان بالشكل التالي

$$x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} x^{n-r+1} y^r + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r-1} x^{n-r+1} y^r =$$

$$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{r=1}^n \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \right] x^{n-r+1} y^r =$$

$$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{r=1}^n \binom{n+1}{r} x^{n+1-r} y^r = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} x^{n+1-r} y^r$$

تعتبر العلاقة 9 أهم علاقة في حساب معاملات مفكوك ذي الحدين

ولديها العديد من النتائج

نتيجة 1

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

البرهان

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^{n-i} x^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \quad (3)$$

سنضع $x=1$ في طرفي المعادلة

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

نتيجة 2

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i = 0$$

البرهان

بوضع $x=-1$ في طرفي المعادلة (3)

$$(1 - 1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i = 0$$

نتيجة 3

$$\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

البرهان

$$(1 + x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$$

باشتقاق الطرفين ثم وضع $x=1$ نحصل على العلاقة المطلوبة انظر

$$((1 + x)^n)' = n(1 + x)^{n-1} = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} x^{i-1}$$

ثم وضع $x=1$

$$n(1 + 1)^{n-1} = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} 1^{i-1} = n2^{n-1}$$

نتيجة 4

$$\sum_{r=0}^k \binom{m}{r} \binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$$

البرهان

$$(1 + x)^m (1 + x)^n = (1 + x)^{n+m}$$

نستطيع الاستنتاج أن معامل الحد ذو القوة k في يساوي هو مجموع معاملات الحدود ذوي الأس k الناتجة من ضرب القوسين

$$\sum_{r=0}^k \binom{m}{r} x^r \binom{n}{k-r} x^{k-r} = \binom{m+n}{k} x^k$$

بوضع $x=1$ نحصل على العلاقة المطلوبة

نتيجة 5

$$\sum_{r=0}^k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

البرهان بوضع

$$n = m = k$$

في النتيجة 4 وسنحصل على المطلوب

نتيجة 6

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$$

البرهان

من المعلوم أن

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

بمكاملة طرفي العلاقة من -1 الى الصفر نحصل على التالي

$$\int_{-1}^0 (x+1)^n dx = \int_{-1}^0 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k dx \rightarrow$$

$$\frac{1}{n+1} [(x+1)^{n+1}]_{-1}^0 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} x^{k+1} \right]_{-1}^0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} x^k$$

نتيجة 7

العلاقة 10 (علاقة التخلص من الإشارة السالبة)

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}$$

الإثبات

في الحقيقة من التعريف 1

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1}$$

سنضع $-n$ بدلا من n في العلاقة ونأخذ (-1) من كل قوس في البسط

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2) \cdots (-n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{(-1)(n)(-1)(n+1)(-1)(n+2) \cdots (-1)(n+k-1)}{k!} \end{aligned}$$

بعد ملاحظة أن عدد الأقواس التي أخذنا منها (-1) كعامل مشترك يساوي k و ضرب البسط والمقام في المقدار $(n-1)!$ فإن العلاقة تتخذ الشكل التالي

$$\begin{aligned} &= (-1)^k \frac{(n+k-1)(n-k)(n-k-1) \cdots n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{k!(n-1)!} \\ &= (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1} \end{aligned}$$

نتيجة 8 (علاقة القلب)

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}$$

البرهان

في الحقيقة إن وضع $-n$ بدلا من n في العلاقة 10 يعطينا النتيجة 8 مباشرة

نتيجة 9 (علاقة الجذور)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)_k &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1 \cdot (-1)(-3)(-5) \dots (-2k + 1)}{k!} = \left(\frac{-1}{2}\right)^k \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k - 1)}{k!} = \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)^k \frac{\prod_{i=1}^k (2i - 1)}{k!} \end{aligned}$$

٣. دوال التوليد Generating Functions

لنفرض أن لدينا متسلسلة الأعداد

$$s_n = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$$

تعريف 3

نقول عن الدالة $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ أنها دالة توليد للمتسلسلة s_n إذا كان بإمكاننا حساب الحد a_i بواسطة معرفة سلوك هذه الدالة .

لاحظ أن a_i هو معامل الحد الذي يحتوي على x^i الذي سنطلق عليه دليل الحد

وفي معرض حديثنا عن دوال التوليد نشير إلى أننا نتناول بالدراسة دوال التوليد الاعتيادية (Ordinary Generating Functions) ما لم نقل غير ذلك

مثال 1-3

لنفرض أن لدينا المتوالية الهندسية التي حدها الأول 1 وأساسها x ، إن مجموع هذه المتوالية الهندسية يعطى بالعلاقة

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

وإذا كان $|x| > 1$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

وهكذا فإننا نستطيع أن نقول أن

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x} \quad (A)$$

لاحظ أن معامل x^i في العبارة السابقة ستجده مساويا 1 في كل حد من الحدود .

إذا من تعريف دالة التوليد نستطيع أن نقول $\frac{1}{1-x}$ هي دالة توليد للمتسلسلة الأعداد

$$s_n = \langle 1, 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$$

مثال 2-3

لو إستبدلنا $(x-)$ ب x فإن العلاقة (A) ستتحول إلى الشكل

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

بملاحظة المعاملات نستطيع أن نقول أن $\frac{1}{1+x}$ هي دالة توليد للمتسلسلة

$$s_n = \langle 1, -1, 1, -1, \dots \rangle$$

مثال 3-3

سنقوم كما قمنا في المثال السابق بوضع $2x$ بدلا من x في العلاقة (A) وسنحصل على التالي

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2^2 x^2 + 2^3 x^3$$

بملاحظة المعاملات نستطيع أن نقول أن $\frac{1}{1-2x}$ هي دالة توليد للمتسلسلة

$$s_n = \langle 1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots \rangle$$

وبشكل عام فإن $\frac{1}{1-ax}$ هي دالة توليد للمتسلسلة

$$s_n = \langle 1, a, a^2, a^3, \dots \rangle$$

مثال 4-3

ماذا سيحدث لو أننا وضعنا x^2 مكان x في العلاقة من x في العلاقة (A) ؟

في الحقيقة سنحصل على الآتي

$$g(x) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}$$

لاحظ أن معاملات الحدود التي أدلتها فردية يساوي الصفر بينما معاملات الحدود التي أدلتها زوجية يساوي الواحد وهذا يعني أن الدالة $g(x)$ هي دالة توليد للمتسلسلة

$$s_n = \langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle$$

في الحقيقة يمكن الحصول على دالة توليد للمتسلسلة

$$d_n = \langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle$$

والتي تقع فيها الأصفار كمعاملات للحدود ذوي الأدلة الزوجية وذلك عن طريق ضرب $g(x)$ في x

كما يلي

$$h(x) = xg(x) = x \cdot \frac{1}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n+1}$$

وهكذا فإن $\frac{x}{1-x^2}$ هي دالة توليد للمتسلسلة

$$d_n = \langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle$$

مثال 5-3

كيف يمكن الحصول على دالة توليد للمتوالية

$$s_n = \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$$

الحل

نقوم باشتقاق طرفي العلاقة (A) لنحصل على المتوالية المطلوبة

$$h(x) = (f(x))' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = (1 + x + x^2 + \dots + x^n)'$$

$$h(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$$

وهكذا فإن الدالة $\frac{1}{(1-x)^2}$ هي الدالة التوليد الخاصة بالمتوالية

$$s_n = \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$$

مثال 6-3

اوجد دالة توليد للمتسلسلة

$$b_n = \langle 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2 \rangle$$

الحل

انظر إلى دالة توليد المتسلسلة s_n من المثال (5-3) والتي رمزنا لها بـ $h(x)$

$$h(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$$

بضرب طرفي العلاقة في x نحصل على

$$xh(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots + nx^n$$

بعد اشتقاق طرفي العبارة سنحصل على المتسلسلة المطلوبة

$$(xh(x))' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots + n^2x^{n-1}$$

مما سبق ينتج أن $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ هي الدالة المطلوبة لتوليد المتسلسلة b_n

نتيجة هامة 1

من المثال (6-3) نستخلص شيئاً هاماً وهو طريقة إنتاج متسلسلة الأعداد الطبيعية مرفوعة إلى الأس m

ويتلخص بالآتي:

١. خذ الدالة $h(x)$ في المثال المذكور — والتي تعطينا سلسلة الأعداد الطبيعية — ونضرب طرفيها في x
٢. نشق طرفي الدالة الناتجة من الضرب في x وبهذا نكون قد رفعنا أس المتسلسلة بمقدار واحد
٣. نكرر هذه الخطوتين السابقتين على الدوال الناتجة (أي أننا نستمر في الرفع) حتى نصل إلى الأس المطلوب

مثال 7-3

أوجد دالة توليد المتسلسلة

$$s_n = \langle 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$$

الحل

نعلم من المثال 5-3 أن $\frac{1}{(1-x)^2}$ هي دالة توليد المتسلسلة $\langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$ ، سنأخذ بعين الاعتبار أن عدد الأصفار في بداية المتسلسلة المطلوبة هو 3 وسنرى كيف ستتعاكس هذه الحقائق على دالة التوليد المطلوبة

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$$

بضرب طرفي العلاقة في x^3 سنحصل على الآتي

$$\frac{x^3}{(1-x)^2} = x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + \dots + nx^{n+2}$$

لاحظ غياب الحدود والتي تساوي قوى أدلتها كلا من 0, 1, 2 وهذا يدل على أن معاملات هذه الحدود يساوي الصفر وهو المطلوب من هذا التمرين

نتيجة هامة 2

لإزاحة المتسلسلة k خانة إلى اليمين نضرب طرفيها في القيمة x^k

مثال 8-3

إذا كانت لدينا دالة التوليد

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

فاوجد المتسلسلة s_n التي تولدها هذه الدالة

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$A(x-2) + B(x-3) = x+1 \Rightarrow x(A+B) - 2A - 3B = x+1$$

بمقارنة المعاملات نحصل على الآتي

$$A+B=1, -2A-3B=1$$

وبحل المعادلتين معا نجد أن $A=4, B=-3$ وهذا يعني أن

$$f(x) = \frac{4}{(x-3)} + \frac{(-3)}{(x-2)} = \frac{4}{-3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{x}{3}\right)} + \frac{-3}{-2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{4}{-3} \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots\right) + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots\right)$$

مما سبق نستطيع أن نقول معامل الدليل x^i يساوي $\frac{4}{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i$ وبهذا تكون المتسلسلة المطلوبة هي

$$s_n = \left\langle \frac{4}{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0, \frac{4}{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1, \frac{4}{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots \right\rangle$$

وبهذا نكون قد بينا طريقة الحصول على المتسلسلة بعد معرفة دالة التوليد الخاصة بها بمعنى آخر العلاقة بين الحد العام وبين دالة التوليد

مثال 9-3

أوجد دالة توليد المتسلسلة التالية

$$s_{n1} = \langle 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, \dots \rangle$$

$$s_{n2} = \langle 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots \rangle$$

الحل

$$f_1(x) = 2x^3, \quad f_2(x) = x$$

واضح أن كلا من المتسلسلتين الأخيرتين يحتوي فقط على حد وحيد لذلك بقيت الحدود ذوات الأدلة المناسبة (لموقع الحد الباقي) واختفت بقيت الحدود وبالمثل نستطيع وبكل ثقة أن نقول أن دالة توليد المتسلسلة

$$s_{n3} = \langle 5, 3, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, \dots \rangle$$

هي الدالة

$$f_3(x) = 5 + 3x + 7x^5$$

مثال 10-3

أوجد دالة التوليد الخاصة بمتسلسلة فيبوناتشي الشهيرة ثم أوجد الحد العام أو الحد النوني إن أمكن

الحل

إن المتسلسلة المطلوبة هي

$$s_n = \langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots \rangle$$

وإذا رمزنا للحد العام أو الحد النوني بالرمز f_n فإن $f_0 = 0, f_1 = 1$ فإن المتسلسلة تأخذ الصورة

$$s_n = \langle f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots \rangle$$

وتكون دالة التوليد المطلوبة لهذه المتسلسلة هي

$$F(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + \dots$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أهم خاصية لمتسلسلة فيبوناتشي وهي كون كل حد يساوي مجموع الحدين السابقين

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

فإن المتسلسلة تأخذ الصورة

$$s_n = \langle f_0, f_1, f_0 + f_1, f_1 + f_2, f_2 + f_3, \dots \rangle$$

وتكون دالة التوليد الخاصة بها هي

$$F(x) = f_0 + f_1x + (f_0 + f_1)x^2 + (f_1 + f_2)x^3 + (f_2 + f_3)x^4 + \dots$$

لتكن لدينا المتسلسلة

$$s_1 = \langle f_0, f_1, 0, 0, 0, 0, \dots \rangle$$

أن دالة التوليد لهذه المتسلسلة هي

$$F_1(x) = f_0 + f_1x = x$$

وإذا قمنا بإزاحة المتسلسلة s_n إلى اليمين خانة واحدة وهذا يعني ضرب الدالة المولدة لها في x (انظر المثال 3-7) ونحصل على المتسلسلة التالية

$$s_2 = \langle 0, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots \rangle \text{ or } s_2 = \langle 0, f_0, f_1, f_0 + f_1, f_1 + f_2, f_2 + f_3, \dots \rangle$$

وتكون الدالة التوليد الخاصة بها هي

$$xF(x) = f_0x + f_1x^2 + f_2x^3 + f_3x^4 + f_4x^5 + \dots$$

وإذا قمنا بإزاحة s_n خانتين فإننا سنحصل على المتسلسلة

$$s_3 = \langle 0, 0, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots \rangle \text{ or } s_3 = \langle 0, 0, f_0, f_1, f_0 + f_1, f_1 + f_2, f_2 + f_3, \dots \rangle$$

وهذا يعني ضرب الدالة $F(x)$ في x^2 لتكون دالة توليد المتسلسلة s_3 هي

$$x^2F(x) = f_0x^2 + f_1x^3 + f_2x^4 + f_3x^5 + f_4x^6 + \dots$$

بجمع حدود المتسلسلات s_1, s_2, s_3 فإننا سنحصل على المتسلسلة التالية (وهذا يعني جمع دوال التوليد المرافقة للمتسلسلات)

$$\langle f_0, f_1, 0, 0, 0, 0, \dots \rangle$$

$$\langle 0, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \dots \rangle$$

$$\langle 0, 0, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots \rangle$$

وتكون نتيجة الجمع هي المتسلسلة s_4

$$\langle f_0, f_0 + f_1, f_0 + f_1, f_1 + f_2, f_2 + f_3, \dots \rangle$$

وتكون دالة التوليد الخاصة بها هي

$$x + xF(x) + x^2F(x)$$

بمراعاة كون $f_0 = 0$ فإن الحد الثاني من المتسلسلة s_4 سيأخذ القيمة f_1 ذلك ان $f_0 + f_1 = f_1$ وتأخذ المتسلسلة s_4 الشكل التالي

$$s_4 = \langle f_0, f_1, f_0 + f_1, f_1 + f_2, f_2 + f_3, \dots \rangle$$

واضح تساوي المتسلسلتين s_4 و s_n وهذا يقتضي تساوي دوال التوليد

$$F(x) = x + xF(x) + x^2F(x) \Rightarrow F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = x \Rightarrow F(x) = \frac{x}{(1 - x - x^2)}$$

وبهذا نكون قد حصلنا على دالة التوليد الخاصة بمتسلسلة فيبوناتشي ونكون قد انتهينا من الجزء الأول من السؤال وسنبداً بخطوات إيجاد الحد العام

$$(1 - x - x^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$(1 - x - x^2) = \left(x + \frac{(1 - \sqrt{5})}{2}\right) \left(-x - \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}\right) =$$

$$\frac{(1 - \sqrt{5})}{2} \left(1 + \frac{2}{1 - \sqrt{5}}x\right) \left(-\frac{(1 + \sqrt{5})}{2}\right) \left(1 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}x\right)$$

لاحظ أن

$$\frac{(1-\sqrt{5})}{2} \cdot \left(-\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right) = 1$$

سنضع $\phi_1 = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$ ونضع $\phi_2 = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ من العلاقة الأخيرة $\phi_1 \phi_2 = -1$ وينتج لدينا أن $-\phi_1 = \frac{1}{\phi_2}$ ومنه فإن

$$(1-x-x^2) = \frac{(1-\sqrt{5})}{2} \left(1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}}x\right) \left(-\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right) \left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}x\right) = 1 \cdot (1-\phi_1 x)(1-\phi_2 x)$$

نستطيع أن نقول الآن

$$F(x) = \frac{x}{(1-x-x^2)} = \frac{A}{(1-\phi_1 x)} + \frac{B}{(1-\phi_2 x)} \Rightarrow A(1-\phi_2 x) + B(1-\phi_1 x) = x$$

بمقارنة المعاملات فإن

$$-\phi_2 A - \phi_1 B = 1 \text{ and } A + B = 0$$

$$A = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ و } B = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

وتأخذ دالة التوليد الشكل الآتي

$$F(x) = -\frac{1}{\sqrt{5}}(1 + \phi_1 x + \phi_1^2 x^2 + \phi_1^3 x^3 + \dots) + \frac{1}{\sqrt{5}}(1 + \phi_2 x + \phi_2^2 x^2 + \phi_2^3 x^3 + \dots) \Rightarrow$$

$$a_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\phi_1^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\phi_2^n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

وهكذا نكون قد حصلنا على صيغة لحساب كل حد من حدود المتسلسلة

مثال 11-3 (تطبيق يومي)

بكم طريقة يمكن أن نضع 6 ثمرات من الفواكه مأخوذة من أربعة أنواع مختلفة (تفاح – موز-برتقال-كمثرى) داخل كيس بحيث تتحقق الشروط التالية

- عدد التفاحات زوجي
- عدد ثمار الموز هو من مضاعفات الخمسة
- لا يزيد عدد البرتقالات على 4
- ولا يزيد عدد ثمار الكمثرى على 1

الحل

أن مسألة كهذه يتعذر حلها باستخدام طرق الحساب المعروفة (التوافيق مثلاً) لكن حلها ضمن الـ *Generating functions* لهو أمر في غاية السهولة انظر

$$\text{Apples- } A(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\text{Bananas- } B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots = \frac{1}{1-x^5}$$

$$Oranges-O(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1}{1-x} - \frac{x^5}{1-x} = \frac{1-x^5}{1-x}$$

$$Pears-P(x) = 1 + x = \frac{1}{1-x} - \frac{x^2}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

وهكذا وحسب مبدأ العد فإن عدد الطرق الممكنة هو

$$A(x)B(x)O(x)P(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \Rightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$$

واضح من العبارة الأخيرة أن معامل x^6 هو 7 وهو عدد الطرق المطلوب

4. العلاقات التكرارية (Recurrence Relations)

نعرف جميعاً متسلسلة فيبوناتشي الشهيرة 0,1,1,2,3,5,8 ونعرف أن كل حد فيها هو مجموع الحدين السابقين له وأن الحدين الأولين هما $f_0 = 0, f_1 = 1$ نكتب العبارة الأخيرة رياضياً بالشكل التالي

أن هذا النوع من العلاقات الرياضية يطلق عليه علاقة تكرارية Recurrence Relations. سنتفق في هذا الباب على أننا نعني بكلمة علاقة التكرارية ما لم نذكر غير ذلك. هناك العديد من الأمور التي يجب التطرق إليها أثناء دراسة العلاقات التكرارية على سبيل المثال:

درجة العلاقة التكرارية (The Order Of Recurrence Relation): إن درجة العلاقة تخبرنا بعدد الحدود التي تسبق الحد النوني a_n والتي يجب أن نعود إليها كي نحسب الحد النوني فمثلاً نقول أن درجة العلاقة التي تصف متسلسلة فيبوناتشي من هي الدرجة الثانية كما نقول أن العلاقة التالية $a_n = a_{n-1} + n$ من الدرجة الأولى

خطية العلاقة التكرارية (Linearity of Recurrence Relation): نعني بخطية العلاقة أنه يمكن تمثيل الحد النوني a_n بالشكل التالي

$$a_n = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + \dots + c_{n-1} a_{n-1}$$

بحيث يكون $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ ثابتاً أو $F(n)$ ولكن ليس a_i ، مثلاً نقول أن العلاقة $a_n = a_{n-1} a_{n-2}$ علاقة غير خطية كما أن العلاقة $a_n = n a_{n-1}$ علاقة خطية (Linear) وبشكل عام فإن غياب الخطية يورث الكثير من المشاكل كما هو معروف في عالم الرياضيات.

تجانس العلاقة التكرارية الخطية (Homogeneity of Linear Recurrence Relation): لنفرض علاقة خطية تكرارية معرفة بالشكل التالي:

$$a_n = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + \dots + c_{n-1} a_{n-1} + F(n)$$

نقول عن هذه العلاقة أنها متجانسة (Homogeneous) إذا وفقط إذا كانت $F(n) = 0$. بناء على ما سبق نستطيع أن نقول أن العلاقة التي تعطينا متسلسلة فيبوناتشي هي علاقة خطية متجانسة بينما العلاقة $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ هي علاقة غير متجانسة.

حل العلاقات الخطية ذات المعاملات الثابتة

نعني بحل العلاقة هو إيجاد صيغة عامة للحد النوني a_n دون اللجوء إلى التكرارية والمثال التالي يوضح معنى إيجاد حل للعلاقة :

مثال 1-4

حل العلاقة $a_n = 2a_{n-1}$ علماً أن $a_0 = 1$

الحل $a_n = 2^n$ وفي البنود التالية سنبين كيفية الحصول على الجواب الصحيح

الحالة الأولى (العلاقات المتجانسة)

مثال 2-4

اوجد الحد العام للعلاقة

$$a_{n+1} = 2a_n \text{ علما أن } a_0 = 1$$

الحل : سنفرض أن حل العلاقة يعطى بالصورة $a_n = As^n$ سنقوم بالتعويض في العلاقة المعطاة

$$a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow As^{n+1} = 2As^n$$

وبقسمة طرفي المساواة الأخيرة على As^n نجد أن $s = 2$ و بالتعويض في الفرض سنجد أن $a_n = A(2)^n$ ولكن عندما $n = 0$ فإن $a_0 = 1$

$$\therefore a_0 = 1 = A(2)^0 \text{ وهذا يعني أن } A = 1 \text{ وهكذا نجد أن الحل المطلوب هو } a_n = 1 \cdot (2)^n$$

مثال 3-4

اوجد الحد العام للعلاقة

$$a_{n+1} = -3a_n \text{ علما أن } a_0 = 2$$

كما في المثال السابق سنفرض أن حل العلاقة يعطى بالصورة $a_n = As^n$ سنقوم بالتعويض في المعادلة المعطاة

$$a_{n+1} = -3a_n \Rightarrow As^{n+1} = -3As^n \Rightarrow s = -3$$

بالتعويض في الفرض ينتج لدينا أن $a_n = A(-3)^n$ وبمراعاة أن $a_n = 2$ عندما $n = 0$ فإن الأمور تتخذ المسار التالي

$$a_0 = 2 = A(-3)^0 \Rightarrow 2 = A \cdot 1 \Rightarrow A = 2$$

$$a_n = As^n \Rightarrow a_n = 2(-3)^n$$

مثال 4-4

اوجد الحد العام للعلاقة

$$a_{n+2} = -2a_{n+1} + 3a_n \text{ علما أن } a_0 = -4, a_1 = 5$$

الحل سنتخذ نفس المسار السابق وذلك بفرض أن الحل يعطى بالصورة $a_n = As^n$

$$a_{n+2} = -2a_{n+1} + 3a_n \Rightarrow a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \Rightarrow As^{n+2} + 2As^{n+1} - 3As^n = 0 \Rightarrow$$

$$s^2 + 2s - 3 = 0 \Rightarrow (s + 3)(s - 1) = 0 \Rightarrow s = 1, s = -3$$

يمكن أن نقول الحل المطلوب يعطى بالعلاقة $a_n = A(1)^n + B(-3)^n$ (يمكن إثبات ذلك) و لإيجاد قيمتي A, B نقوم بالآتي:

$$a_0 = -4 = A(1)^0 + B(-3)^0 \Rightarrow A + B = -4$$

$$a_1 = 5 = A(1)^1 + B(-3)^1 \Rightarrow A - 3B = 5$$

وبحل المعادلتين معا نجد أن $A = \frac{-7}{4}$ and $B = \frac{-9}{4}$ وتكون قيمة الحد العام هي $a_n = \frac{-7}{4}(1)^n + \frac{-9}{4}(-3)^n$.

ملحوظة هامة: عندما أوجدنا قيم s حصلنا على قيمتين ولا بد أن كلا منهما تحقق العلاقة المعطاة انظر

$$As_1^{n+2} = -2As_1^{n+1} + 3As_1^n = As_1^n(-2s_1 + 3) \Rightarrow As_1^{n+2} = As_1^n(-2s_1 + 3)$$

لو وضعنا $s_1 = 1$ فسنحصل على أن $A(1)^{n+2} = A(1)^n(-2 + 3) = A$ وبالمثل

$$Bs_2^{n+2} = -2Bs_2^{n+1} + 3Bs_2^n = Bs_2^n(-2s_2 + 3) \Rightarrow Bs_2^{n+2} = Bs_2^n(-2s_2 + 3)$$

ولوضعنا $s_2 = -3$ فسنحصل على أن $B(-3)^{n+2} = B(-3)^n((-2) \cdot (-3) + 3) = B(-3)^n(9) = B(-3)^{n+2}$

بجمع طرفي العلاقتين أعلاه نستطيع أن نقول أن $a_n = A(1)^n + B(-3)^n$.

في الحقيقة نود الإشارة إلى أن العلاقات الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية تحتاج إلى مزيد من التأمل وذلك بسبب طبيعة جذور

Characteristic Equation

(١) إذا كان للمعادلة جذران مختلفان فإن الحد العام يكون على الصورة $a_n = As_1^n + Bs_2^n$

(٢) وإذا كان للمعادلة جذر مضاعف مختلفان فإن الحد العام يكون على الصورة $a_n = As^n + Bns^n$

سنري كيف سنستخدم الأمور التي تعلمناها في الأمثلة القادمة

مثال 4-5

أوجد الحد العام لهتسلسلة فيبوناتشي والتي تعطى بالعلاقة $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ علما أن $f_0 = 0, f_1 = 1$

الحل

بفرض $f_n = As^n$ والتعويض في العلاقة المعطاة نجد الآتي

$$s^2 - s - 1 = 0 \Rightarrow s = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \text{ and } s = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

ويكون الحد العام أو الحد النوني على الصورة

$$f_n = A\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

نستخدم f_0, f_1 لإيجاد قيم المعاملات المجهولة

$$f_0 = A\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^0 = A + B = 0$$

$$f_1 = A\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 = A\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

وبحل المعادلتين نجد أن $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ and $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ وهكذا نستطيع أن نقول أن الحد العام أو الحد النوني في متسلسلة فيبوناتشي

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

يعطى بالعلاقة

مثال 6-4

أوجد الحد العام للمتسلسلة التي تعطى بالعلاقة التكرارية $a_{n+2} = 5a_{n+1} + 14a_n$ علماً أن $a_0 = a_1 = -4$

الحل

نقوم بإيجاد حل لل *Characteristic Equation* لاحقاً (CE)

$$s^2 - 5s - 14 = 0 \Rightarrow (s + 2)(s - 7) = 0 \Rightarrow s = -2 \text{ and } s = 7$$

من الواضح أن الحد العام يكون على الصورة $a_n = A(-2)^n + B(7)^n$. باستخدام قيم a_0, a_1 نحصل على المعادلات التالية

$$a_0 = A(-2)^0 + B(7)^0 = A + B = -4$$

$$a_1 = A(-2)^1 + B(7)^1 = -2A + 7B = -4$$

بحل المعادلتين معاً نجد أن $A = \frac{-8}{3}$ and $B = \frac{-4}{3}$ ويكون الحد العام هو

$$a_n = \frac{-8}{3}(-2)^n + \frac{-4}{3}(7)^n$$

مثال 7-4

أوجد الحد العام للمتسلسلة التي تعطى بالعلاقة التكرارية $a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n$ علماً أن $a_0 = 1, a_1 = 2$

$$s^2 - 2s + 1 = 0 \Rightarrow (s - 1)^2 = 0 \Rightarrow s = 1 \Rightarrow a_n = A(1)^n + Bn(1)^n$$

باستخدام الشروط الابتدائية (قيم أول حدين من المتسلسلة) نجد أن

$$A = 1 \text{ and } B = 1$$

ومنه أن $a_n = n + 1$

الحالة الثانية (العلاقات غير المتجانسة)

إن الصورة العامة للعلاقة الخطية من الدرجة الأولى غير المتجانسة والتي معاملاتها ثابتة هي $a_n = Aa_{n-1} + F(n)$

ولإيجاد الحد العام نتبع الخطوات التالية:

- (١) نقوم بإيجاد الحد العام للعلاقة المتجانسة $a_n = Aa_{n-1}$ وليكن $s^{(0)}$
- (٢) نقوم بإيجاد الحل الخاص s_n والذي يكون مقروناً بطبيعة $F(n)$
- (٣) نقوم بجمع $s^{(0)}$ و s_n فيكون الناتج هو الحد العام للعلاقة ككل أي أن $a_n = s^{(0)} + s_n$
- (٤) نقوم باستخدام قيم الحدود الأولى للتخلص من الثوابت في $s^{(0)}$

مثال 8-4

أوجد الحد العام للمتسلسلة المعطاة بالعلاقة $a_n = 6a_{n-1} + 60$ علماً أن $a_0 = 3$

الحل

نقوم بإيجاد حل المعادلة المتجانسة

$$s - 6 = 0 \Rightarrow s = 6 \Rightarrow s^{(0)} = A6^n$$

بما أن $F(n)$ عبارة دالة ثابتة فإن الصورة العامة للدوال الثابتة هي $s_n = B$ نقوم بالتعويض عنه في العلاقة الأساسية كالتالي:

$$B = 6B + 60 \Rightarrow -5B = 60 \Rightarrow B = -12$$

$$\therefore a_n = s^{(0)} + s_n = A6^n - 12. \text{ put } n = 0 \text{ then } a_n = A6^n - 12 = A6^0 - 12 = 3 \Rightarrow A = 15$$

$$a_n = 15 \cdot 6^n - 12$$

مثال 9-4

أوجد الحد العام للمتسلسلة $a_n = 2a_{n-1} + 6n + 5$ علماً أن $a_0 = -2$

الحل

$$s - 2 = 0 \Rightarrow s = 2 \Rightarrow s^{(0)} = A \cdot 2^n = 2^n A$$

إن $F(n)$ عبارة دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى ولذا فإن الصورة العامة لكثيرات الحدود من الدرجة الأولى هي $s_n = Bn + C$

سنستبدل s_n بـ a_n في العلاقة الأساسية وسنغير ما يلزم :

$$a_n = 2a_{n-1} + 6n + 5 \Rightarrow Bn + C = 2B(n-1) + 2C + 6n + 5 \Rightarrow -Bn + 2B - C = 6n + 5$$

بمقارنة المعاملات نجد أن

$$-B = 6 \text{ and } 2B - C = 5 \Rightarrow B = -6 \text{ and } C = \frac{17}{2}$$

وهكذا فإن الحل الخاص هو $s_n = -6n + \frac{17}{2}$

$$\therefore a_n = s^{(0)} + s_n = A \cdot 2^n - 6n + \frac{17}{2}. \text{ put } n = 0 \text{ then } a_n = a_0 = A \cdot 2^0 + \frac{17}{2} = -2$$

$$A = -\frac{17}{2} - 2 = -\frac{21}{2}$$

سنولي شكل $F(n)$ أهمية خاصة وذلك لتسهيل عملية اختيار الحل الخاص ومن أجل هذا سنعتبر أن الصيغة العامة هي

$$t^n (c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \dots + c_0) \quad (B)$$

حيث t عدد حقيقي. واضح أن $F(n)$ هي حاصل ضرب دالة أسية في كثيرة حدود. سنقيم علاقة بين شكل $F(n)$ وجذور المعادلة المرافقة للعلاقة المتجانسة CE وذلك كما يلي :

(١) إذا كانت $F(n)$ كثيرة حدود فقط فهذا يعني أن $t^n = 1$ ومنه أن $t = 1$ وهناك حالتان:

A. أن يكون 1 هو احد جذور CE وهكذا تكون الصيغة العامة للحل الخاص هي

$$s_n = 1^n n^j (c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \dots + c_0) = n^j (c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \dots + c_0)$$

حيث z هو عدد مرات دخول 1 كجذر لل CE و m هي درجة كثيرة الحدود.

B. أن لا يكون 1 أحد جذور CE وبالتالي يكون الحل الخاص على الصورة

$$s_n = (c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \dots + c_0)$$

لاحظ أننا وضعنا كثيرة الحدود في الصورة العامة مع مراعاة درجتها.

(٢) إذا كانت $F(n)$ دالة أسية فقط أي على الصورة At^n فهناك أيضا حالتان:

A. أن يكون t أحد جذور CE وعليه فإن الحل الخاص يكون على الصورة $An^j t^n$

حيث z هو عدد مرات دخول t كجذر لل CE

B. أن لا يكون t أحد جذور CE وبالتالي يكون الحل الخاص على الصورة

$$s_n = At^n$$

(٣) إذا كانت $F(n)$ عبارة عن حاصل ضرب دالة أسية وكثيرة حدود فسنقوم بنفس العمل في الحالات السابقة مع تغيير ما يلزم

A. أن يكون t أحد جذور CE وعليه فإن الحل الخاص يكون على الصورة

$$s_n = n^j t^n (c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \dots + c_0)$$

حيث z هو عدد مرات دخول 1 كجذر لل CE و m هي درجة كثيرة الحدود

B. أن لا يكون t أحد جذور CE وبالتالي يكون الحل الخاص على الصورة

$$s_n = t^n (c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \dots + c_0)$$

مثال 4-10

أوجد الحد العام للمتسلسلة المعطاة بالعلاقة التكرارية $a_{n+1} = a_n + 4n + 3$ علماً أن $a_0 = 1$

الحل : نقوم بإيجاد حلول CE كما يلي:

$$s - 1 = 0 \Rightarrow s = 1 \Rightarrow s^{(0)} = A(1)^n$$

إذا القيمة 1 هي أحد جذور ال CE

بما أن $F(n)$ هي كثيرة حدود فقط إذا $t=1$ وهو يدخل مرة واحدة كجذر لل CE وعليه فإن $j=1$

لاحظ أن كثيرة الحدود $4n + 3$ من الدرجة الأولى إذا $m=1$ والصورة العامة لكثيرات الحدود من الدرجة الأولى هي

$$Bn + C \quad \text{مما سبق نستطيع أن نقول أن الحل الخاص يأخذ الصورة} \quad s_n = (1)^n n(Bn + C) = n(Bn + C)$$

سنستبدل s_n ب a_n ونغير ما لإيجاد قيم المعاملات في العلاقة الأساسية

$$a_{n+1} = a_n + 4n + 3 \Rightarrow (n+1)(B(n+1) + C) = n(Bn + C) + 4n + 3$$

$$B(n+1)^2 + C(n+1) = Bn^2 + Cn + 4n + 3 \Rightarrow$$

$$Bn^2 + 2Bn + B + Cn + C = Bn^2 + Cn + 4n + 3 \Rightarrow 2Bn + B + C = 4n + 3 \Rightarrow B = 2, C = 1$$

ويكون الحل الخاص على الصورة $s_n = n(2n + 1)$

$$a_n = A(1)^n + n(2n + 1), \text{ put } n = 0 \text{ then } a_0 = A(1)^0 = 1 \Rightarrow A = 1$$

ويكون الحد العام هو $a_n = n(2n + 1) + 1$

مثال 4-11

أوجد الحد العام للمتسلسلة التي تعطى بالعلاقة $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 3^n$ علماً أن $a_0 = 1, a_1 = 1$

الحل :

واضح ان CE هي $s^2 - 5s + 6 = 0$ وبالتالي فإن حلولها هي $s = 3, s = 2$ ويكون حل المعادلة المرافقة للمتجانسة هو

$$s^{(0)} = A2^n + B3^n$$

واضح أن $F(n) = 3^n$ وعليه فإن $t=3$ وهو أحد جذور المعادلة المرافقة للمتجانسة ويدخل كجذر مرة واحدة (مع أن المعادلة من الدرجة الثانية إلا أن الجذرين مختلفان) وعليه يكون الحل الخاص من الصورة $s_n = Cn3^n$ سنقوم بالتعويض في العلاقة الأساسية:

$$C(n+2)3^{n+2} = 5C(n+1)3^{n+1} - 6Cn3^n + 3^n \Rightarrow 3^2 C(n+2) = 15C(n+1) - 6nC + 1$$

$$9Cn + 18C = 15Cn + 15C - 6nC + 1 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

يكون الحل الخاص $s_n = n3^{n-1}$ ويكون الحد العام كالتالي

$$a_n = s^{(0)} + s_n = A2^n + B3^n + n3^{n-1}$$

ويمكن باستخدام قيم a_0, a_1 إيجاد A, B وهو ما سنتركه للقارئ كتمرين

مثال 4-12

أوجد الحل الخاص للمتسلسلة التي المعطاة بالعلاقة $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + F(n)$

وذلك إذا كانت

$$\begin{aligned} F(n) &= 3^n & .I \\ F(n) &= 3^n(5n + 1) & .II \\ F(n) &= 2^n(4n + 5) & .III \end{aligned}$$

الحل :

سنقوم بإيجاد جذور العلاقة المتجانسة

$$s^2 - 6s + 9 = 0 \Rightarrow (s - 3)^2 = 0 \Rightarrow s = 3$$

إذا العدد 3 يدخل مرتين كجذر معادلة العلاقة المتجانسة

$$\begin{aligned} .I \quad & \text{عندما } F(n) = 3^n \text{ فإن الحل الخاص سيكون على الصورة } s_n = A3^n n^2 \\ .II \quad & \text{عندما } F(n) = 3^n(5n + 1) \text{ فإن الحل الخاص سيكون على الصورة } s_n = 3^n n^2 (An + B) \\ .III \quad & \text{عندما } F(n) = 2^n(4n + 5) \text{ فإن الحل الخاص سيكون على الصورة } s_n = 2^n (An + B) \end{aligned}$$

ويمكن التعويض في العلاقة الأساسية للسؤال ومن ثم إيجاد المعاملات المجهولة ثم جمع الحل الخاص وناتج حل العلاقة المتجانسة ثم استخدام المعطيات للحصول على قيمة الحد العام بعد التخلص من التكرارية

المحتويات

1. الاستقراء (الاستنتاج) الرياضي (MATHEMATICAL INDUCTION)

1.

.....3..... مثال 5-1

.....3..... مثال 6-1

.....4..... مثال 7-1

.....4..... $An + 1 = 11n + 1 + 2 + 122n + 1 + 1 = 11n + 3 + 122n + 3 = 11 \cdot 11n + 2 + 122 \cdot 122n + 1$4..... $= 11 \cdot 11n + 2 + 144 \cdot 122n + 1 = 11 \cdot 11n + 2 + 11 \cdot 122n + 1 + 133 \cdot 122n + 1$

.....4..... مثال 8-1

.....4..... مثال 9-1

.....5..... مثال 10-1

2. المعاملات الخاصة بمفكوك ذي الحدين BINOMIAL COEFFICIENT

2.

.....7..... تعريف 1

.....7..... تعريف 2

.....7..... العلاقة 1 (العلاقة الأساسية)

.....7..... العلاقة 2 (علاقة التناظر)

.....8..... العلاقة 3 (علاقة الإدخال-الإخراج)

.....8..... العلاقة 5

.....9..... حالات خاصة للتعامل مع التوافق أو مع معاملات مفكوك ذي الحدين

.....9..... العلاقة 6

.....10..... العلاقة 7

.....10..... تطبيق جميل للعلاقة 7

.....11..... العلاقة 8

.....12..... نتيجة 1

.....13..... نتيجة 4

.....15..... نتيجة 8 (علاقة القلب)

.....16..... تعريف 3

.....16..... مثال 1-3

.....17..... مثال 2-3

.....17..... مثال 3-3

.....17..... مثال 4-3

.....18..... مثال 5-3

31

18	مثال 3-6
19	نتيجة هامة 1
19	مثال 3-7
19	نتيجة هامة 2
19	مثال 3-8
21	مثال 3-10
23	مثال 3-11 (تطبيق يومي)
24	حل العلاقات الخطية ذوات المعاملات الثابتة
24	مثال 4-1
25	الحالة الأولى (العلاقات المتجانسة)
25	مثال 4-2
25	مثال 4-3
25	مثال 4-4
26	ملحوظة هامة
26	مثال 4-5
27	مثال 4-6
27	مثال 4-7
27	الحالة الثانية (العلاقات غير المتجانسة)
27	مثال 4-8
28	مثال 4-9
29	مثال 4-10
30	مثال 4-11
30	مثال 4-12