

إيجاد نقاط تقاطع دائرتين

بسم الله الرحمن الرحيم

يفرض الدائرة الأولى مركزها $M_1(x_1, y_1)$ و نصف قطرها r_1
و الدائرة الثانية مركزها $M_2(x_2, y_2)$ و نصف قطرها r_2
فتكون معادلة الدائرة الأولى

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$$

و معادلة الدائرة الثانية

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$$

بنشر التربيع لهاتين المعادلتين نحصل على :

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 = r_1^2$$

سنسميها 1

$$x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 = r_2^2$$

سنسميها 2

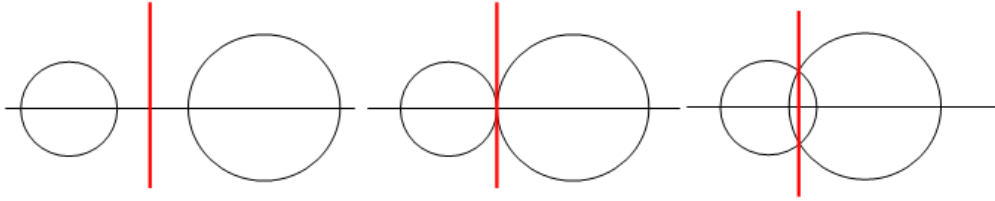
بطرح 2 من 1 نجد :

$$2(x_2 - x_1)x + (x_1^2 - x_2^2) + 2(y_2 - y_1)y + (y_1^2 - y_2^2) = r_1^2 - r_2^2$$

و منه :

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) + r_2^2 - r_1^2 = 0$$

و هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين x و y (تمثل مستقيم في المستوي هو القاطع المشترك للدائرتين)



للتبسيط سنكتبها بالشكل التالي :

$$ax + by + c = 0$$

حيث

$$a = 2(x_2 - x_1)$$

$$b = 2(y_2 - y_1)$$

$$c = (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) + (r_2^2 - r_1^2)$$

للحصول على نقاط تقاطع الدائرتين نوجد الحل المشترك لهذه المعادلة مع معادلة إحدى الدائرتين
من معادلة المستقيم نحسب أحد المجهولين بدلالة الآخر و ليكن y

$$y = \frac{-c - ax}{b}$$

و نقوم بالتعويض في معادلة الدائرة الأولى (مثلاً)

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + \left(\frac{-c - ax}{b}\right)^2 - 2y_1\left(\frac{-c - ax}{b}\right) + y_1^2 - r_1^2 = 0$$

نقوم بإصلاحها :

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + \frac{1}{b^2}(c^2 + a^2x^2 + 2acx) + \frac{2y_1}{b}(c + ax) + y_1^2 - r_1^2 = 0$$

$$(1 + \frac{a^2}{b^2})x^2 + (\frac{2ac}{b^2} - 2x_1 + \frac{2y_1a}{b})x + (x_1^2 + \frac{c^2}{b^2} + \frac{2y_1c}{b} + y_1^2 - r_1^2) = 0$$

هذه معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد هو x
للتبسيط سنكتبها بالشكل

$$ux^2 + vx + w = 0$$

حيث

$$u = 1 + \frac{a^2}{b^2}$$

$$v = \frac{2ac}{b^2} - 2x_1 + \frac{2y_1a}{b}$$

$$w = x_1^2 + \frac{c^2}{b^2} + \frac{2y_1c}{b} + y_1^2 - r_1^2$$

مميز هذه المعادلة هو :

$$\Delta = v^2 - 4uw$$

- (1) إذا كان هذا المميز سالب تماماً فليس للمعادلة حل (الدائرتين متباعدتين)
(2) إذا كان المميز يساوي الصفر فللمعادلة حل واحد (الدائرتين متماستين) , هو :

$$X = \frac{-v}{2u}$$

و هي فاصلة نقطة التماس X , لإيجاد ترتيب هذه النقطة نعوض قيمة X في معادلة القاطع المشترك, فنجد :

$$Y = -\frac{1}{b}(aX + c)$$

فتكون إحداثيات نقطة التماس هي : (X, Y)

- (3) أما إذا كان المميز موجب تماماً فلمعادلة الدرجة الثانية حلين مختلفين (الدائرتين متقاطعتين)
هذان الحلان هما (فواصل نقطتي التقاطع) :

$$X_{(2)} = \frac{-v - \sqrt{v^2 - 4uw}}{2u}$$

$$X_{(1)} = \frac{-v + \sqrt{v^2 - 4uw}}{2u}$$

و لإيجاد تراتيب نقطتي التقاطع نعوض هاتين القيمتين في معادلة القاطع المشترك, فنجد :

$$Y_{(2)} = -\frac{1}{b}(aX_{(2)} + c)$$

$$Y_{(1)} = -\frac{1}{b}(aX_{(1)} + c)$$

و تكون إحداثيات نقطتي التقاطع هي : (X₍₁₎, Y₍₁₎) و (X₍₂₎, Y₍₂₎)

و الله أعلم

أبو خالد السوري
الفريق العربي للبرمجة