

برهن أن أي عدد أولي أكبر من ٢ يمكن كتابته كفرق بين مربعي عددين صحيحين

البرهان الأول:

نبدأ بالقضايا الأولية التالية:

(١) أي عدد حقيقي يمكن كتابته كفرق بين مربعين حقيقيين.

(٢) ليس للعدد الأولي إلا قاسمين؛ أحدهما الواحد و الآخر العدد نفسه.

(٣) أي عدد أولي أكبر من ٢ هو عدد فردي.

و الآن ليكن p أي عدد أولي أكبر من ٢. من القضية (١) يمكن كتابة p كفرق بين مربعين كالتالي:

$$\begin{aligned} p &= x^2 - y^2 \\ &= (x + y)(x - y) \end{aligned} \quad (4)$$

و الآن نتجه إلى إثبات أنهما مربعا عددين صحيحين.

من القضية (٢) يكون

$$p \cdot 1 = (x + y)(x - y)$$

حيث

$$p = x + y \quad (5)$$

$$1 = x - y \quad i.e. \quad x = 1 + y \quad (6)$$

و بالإستبدال من (٦) في (٤) نحصل على

$$\begin{aligned} p &= (1 + y)^2 - y^2 \\ &= 1 + 2y \end{aligned} \quad (7)$$

و بحل الأخيرة في y نحصل على

$$y = \frac{p-1}{2} \quad (I)$$

و بالإستبدال من الأخيرة في (٦) نحصل على

$$x = \frac{p+1}{2} \quad (II)$$

و من القضية (٣) يكون كلٌّ من x و y عددين صحيحين. أي أن:

(أي عدد أولي أكبر من ٢ يمكن كتابته كفرق بين مربعين صحيحين)

و يكون العددان الصحيحان متتاليين و مجموعهما مساوٍ للعدد الأولي، و من أمثلة ذلك:

$$p=3, \quad x=2 \quad \text{and} \quad y=1$$

$$p=5, \quad x=3 \quad \text{and} \quad y=2$$

$$p=7, \quad x=4 \quad \text{and} \quad y=3$$

$$p=11, \quad x=6 \quad \text{and} \quad y=5$$

البرهان الثاني:

يمكن كتابة أي عدد فردي على الصورة

$$2n+1 \quad \text{where} \quad n \in \mathbb{Z}$$

و التي يمكن إعادة صياغتها كالتالي

$$\begin{aligned} 2n+1 &= 2n+1 + n^2 - n^2 \\ &= (n+1)^2 - n^2 \quad \text{where} \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

أي أنه يمكن كتابة أي عدد فردي كفرق بين مربعي عددين صحيحين، و حيث أن فئة الأعداد الأولية أكبر من ٢ هي مجموعة جزئية من فئة الأعداد الفردية، إذن يتحقق المطلوب.

ياسر