

الأخوة الأفاضل ؛ باسم ، عماد ، romanof ...،

قد أستخدم فيما يلي الترميز الآتي أو بعضاً منه :

- = : و تعني التساوي العددي بين قيمتين .
- ≡ : و تعني التكافؤ المنطقي بين قضيتين أو صيغتين .
- ⇒ : و تعني الإستلزام المنطقي (يؤدي إلى) .
- ∨ : و هي ثابت الفصل المنطقي (أو Or) .
- ∧ : و هي ثابت العطف المنطقي (و And) .
- ¬ : و هي ثابت النفي المنطقي Negation .

البند الأول – القضايا الأولية و المبرهنات :

أخي الفاضل باسم .. الجمل أو الصيغ الرياضية مثل المعادلات و المتباينات تسمى المقولات أو القضايا Propositions ، و هذه القضايا تنقسم إلى نوعين :

- **النوع الأول – القضايا أولية Primitive (المقدمات) :** و هي قضايا إبتدائية نتفق على صحتها كأساس للنسق الرياضي (و هذا الإتفاق على الصحة يكون فقط داخل النسق الذي نعمل في إطاره) ، و لا نبرهن عليها بأي نحو كان . و هذه القضايا الأولية باختلاف مسمياتها سواء بديهيات (مسلمات) Axioms أو تعريفات Definitions أو مصادرات Postulates تُشتق منها – ومنها فقط – القضايا التي تتلوهما في النسق الرياضي .
- و المعنى المقصود بقضية أولية (إبتدائية) أنها تستخدم في إثبات ما بعدها من قضايا ، و كلمة Axiom في معناها الدقيق هي لفظة إغريقية الأصل تعني **مقولة أولى** أو **قضية أولية** أو **الأصول الموضوعية** (كما يترجمها الدكتوران محمد مرسي أحمد و محمد ثابت الفندي) ، و لا تعني قضية صحيحة بشكل مطلق ، و منها Axis أي محور إبتدائي (أساسي) .

أي أن القضية الأولية (البديهية-المسلمة-التعريف) نتفق أو نسلم بصحتها فقط داخل النسق الرياضي الذي نعمل في إطاره ، فعلى سبيل المثال المسلمات (البديهيات) اليوقليدية Euclidean Axioms مثل مسلمة التوازي و أقصر مسافة بين نقطتين ليس لها معنى و تصبح خاطئة تماماً و لا يمكن إستخدامها في الهندسة الكروية Spherical Geometry و هي من الهندسات اللايوقليدية Non-Euclidean Geometries ، التي تقوم على قضايا أولية مختلفة و مغايرة و تعبر عن الواقع المادي بصورة أدق بكثير من الهندسة اليوقليدية التي فشلت في نمذجة Modeling النظم المتناهية في الصغر Micro أو النظم المتناهية في الكبر Macro . و إذا شئتَ الدقة فإن المشتغلين بالرياضيات البحتة و دراسة الأنظمة المنطقية لا

يسلمون إلا بقضيتين أولتين لا ثالث لهما ، أما باقي القضايا الأولية فتكون مجرد قضايا موضوعية لإكمال النسق الرياضي المراد بناؤه . وهاتان القضيتان هما :

■ **مبدأ الهوية Identity Principle :** و يعني ببساطة أن كل شيء هو نفسه أو مساوٍ لنفسه . و يُعبر عنه للقيم العددية برمز التساوي (=) ، و للقضايا (الجمل) المنطقية أو الرياضياتية برمز التكافؤ ($\equiv$) الذي يعني أن كلا القضيتين لهما نفس المعنى أو الناتج Conclusion . فنكتب للقيم العددية :

$$X \text{ is } X$$

$$X = X$$

و للقضايا (الجمل) الرياضياتية نكتب :

$$p \equiv p$$

و ذلك مثل :

$$(عماد أكبر سنًا من عادل) \equiv (عادل أصغر سنًا من عماد)$$

فكلا القضيتين لهما نفس المعنى ، و أيضاً :

$$[y = \int_0^5 x \, dx] \equiv [y = \frac{d(12.5t + 3)}{dt}]$$

لهما أيضاً نفس الناتج أو المعنى .

■ **مبدأ عدم التناقض :** و يسمى أيضاً مبدأ الثالث المرفوع . و يعني أن قضية ما إما أن تكون صحيحة أو تكون خاطئة و لا ثالث لهما . و يمكن صياغة هذا المبدأ رمزياً بأشكال متعددة ، فمثلاً لقضية p يمكننا أن نكتب مبدأ عدم التناقض على الصورة :

$$(p \wedge \neg p) \equiv \text{False}$$

$$\neg \neg p \equiv p \quad \text{أو}$$

و على ذلك فإن المقدمات أو القضايا الأولية أو البديهيات أو الأصول الموضوعية تتصف بأنها مما لا يبرهن عليه ؛ لا لأنها صحيحة بذاتها و بصورة مطلقة ، بل لأننا نسلم بها ابتداءً . فمثلاً النظام العددي العشري Decimal System الذي نعرفه بكل مسلماته ليس بديهياً و إنما فقط إعتدنا عليه و سلمنا به ، و يمكن رده إلى قواعد منطقية أولية أعظم يمكن منها إستنتاج عدد

لا نهائي من الأنظمة العددية البديلة و المغايرة (و يمكنك أن ترجع في ذلك إلى أعمال بيانو Peano). يمكنك أيضاً أن تسلم ببديهية أن $1/3$ هو كسر دوري غير منتهٍ و لكنك ستفاجأ بأنه كسر منتهٍ في النظام العددي الستيني ، و لذلك يستخدم الفلكيون النظام الستيني في الحسابات الفلكية لأنه يعفيهم من إجراء تقريبات لكثير من الكسور الدورية في النظام العشري و بذلك تكون الحسابات أكثر دقة بتقليل ما يعرف بتراكم الخطأ Error Accumulation و الذي ينتج عن عمليات التقريب ، و قد استخدم كبلر Kepler النظام الستيني في وضعه لقوانينه الشهيرة عن مدارات الكواكب . أيضاً فإن الكثير من مشكلات نظرية الأعداد يصعب حلها (و أحياناً لا يمكن حلها) إلا إذا استخدمنا أنظمة عددية أخرى مثل النظام الثنائي .

• **النوع الثاني – المبرهنات Theorems :** و هي جملة القضايا أو الصيغ التي يتم البرهنة عليها أو اشتقاقها فقط من المقدمات (القضايا الأولية أو البديهيات أو التعريفات ...) ، و هناك مبدأ منطقي جوهري نصه كالتالي :

"يجب ألا نقبل أي قضية أخرى في النسق الذي نعمل في إطاره إلا إذا أمكن تعريفها أو برهنتها بواسطة القضايا الأولية أو ما سبق إشتقاقه منها بحيث لا يمكن أن تناقض القضية الجديدة ما سبقها من قضايا"

أخي العزيز باسم ، أرجو أن أكون قد ساهمت بما طرحته أعلاه في توضيح بعض ما غمض عليكم من مفاهيم ، كما يسعدني أن أرد على أي استفسارات أخرى في ذات الموضوع فهو -في رأيي- من أهم الموضوعات في الرياضيات و الذي يحتاج لمزيد و مزيد من الإيضاح . و الآن لننتقل إلى موضوع الجذور التربيعية للأعداد التخيلية .

البند الثاني – الجذور التربيعية للأعداد التخيلية :

و سوف أبدأ بسؤالكم عن $\sqrt{i^2}$ و أريد أن أوضح هنا أننا عندما نكتب $\sqrt{i^2}$ فذلك يعني فقط $+\sqrt{i^2}$ و قد قام الأخ عماد حمدي مشكوراً بتوضيح ذلك ، و عليه :

$$+\sqrt{i^2} = +i$$

$$-\sqrt{i^2} = -i$$

$$\pm\sqrt{i^2} = \pm i$$

و الصيغة الأخيرة هي في الواقع جملة منطقية لمعادلتين يربطهما ثابت الفصل (أو Or) و ذلك كالتالي :

$$(\pm\sqrt{i^2} = \pm i) \equiv (+\sqrt{i^2} = +i) \vee (-\sqrt{i^2} = -i)$$

و الآن فلنقم بحساب الجذر التربيعي للعدد التخيلي i ، و لنبدأ بكتابته على صيغة أويلر Euler : Form

$$i = e^{i(\pi/2)} \Rightarrow \sqrt{i} = [e^{i(\pi/2)}]^{1/2} \\ \Rightarrow \sqrt{i} = e^{i(\pi/4)}$$

و هذه الأخيرة يمكن كتابتها بالصيغة الجبرية Algebraic Form كالتالي :

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \Rightarrow \pm\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad (\text{I})$$

أما لحساب $\sqrt{-i}$ ، فعلي أن أنه أولاً إلى أن المشتغلين بالتحليل المركب قد اتفقوا على التخلص من الإشارات السالبة الموجودة تحت الجذور كي لا يتعرضوا للمتناقضة الشهيرة التي ذكرها الأخ عماد ؛ فمثلاً يكتبون $i\sqrt{2}$ عوضاً عن $\sqrt{-2}$ ، و لكن ما هو الحال بالنسبة لحساب $\sqrt{-i}$ ؟ نجد أن الحل يكمن في خواص العدد التخيلي i و التي يمكن صياغتها كالتالي :

$$i^{-2} = -1$$

$$i^{-1} = -i$$

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^{-3} = -i$$

$$i^4 = 1$$

.....

و يمكن كتابة ذلك بالصيغة التالية :

$$i^{4n+k} = i^k \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}^+ \text{ and } k \in \{0,1,2,3\}$$

و هناك صيغة أخرى مكافئة بدلالة حساب البواقي Modular Arithmetic تستخدم كثيراً في نظرية الأعداد و هي :

$$i^n = i^{n \bmod 4}$$

و الآن يمكننا أن نكتب التعادل الآتي :

$$-i = i^3 \Rightarrow \pm\sqrt{-i} = \pm\sqrt{i^3}$$

و يمكننا حساب الجذر التربيعي للعدد $-i$ باستخدام قاعدة الاستبدال الموحد Rule of Uniform Substitution و ذلك بالتعويض عن أي من $-i$ أو i^3 في الصيغة (I) فليس هناك مجال لحدوث متناقضة الجذور هنا :

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{-i} &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+(-i)) \\ &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pm\sqrt{-i} &= \pm\sqrt{i^3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i^3) \\ &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\end{aligned}$$

و يمكنك أيضاً حساب $\sqrt{-i}$ باستخدام صيغة أويلر كما فعلنا سابقاً مع $\sqrt{i}$ ، كما يمكنك حساب كلاهما أيضاً بطرق أخرى ، منها مثلاً فرضك لأي عددين حقيقيين غير سالبين a , b بحيث :

- $\sqrt{i} = a + bi$
- $\sqrt{-i} = a - bi$

و تربيع طرفي كل معادلة و إيجاد قيمة a , b لكل منهما .

البند الثالث – عن تحقق المعادلة و التناقض المنطقي :

الأخوان الكريمان عماد و romanof .. ،

يمكن أن نحصل على قيم تحقق معادلة ما باتباعنا الفنيات الرياضية الصحيحة ، و ذلك على الرغم من وجود تناقض منطقي أو باستخدام صيغة لم تثبت صحتها من عدمه . و الذي أعرضه هنا هو لرفع حالة الإرتباك التي حدثت عند التعويض بالقيم التي حصل عليها الأخ باسم في حله لمعادلته رغم رفضنا للصيغة التي طرحها باعتبارها غير منطقية أو غير صالحة .

و لنطرح معادلة الأخ باسم مرة أخرى :

$$y^2 + 2y - 15 = 0$$

و التي منها نحصل على :

$$y = 3 \quad \text{or} \quad y = -5$$

و لنكتفي بالقيمة الأولى $y = 3$. و الآن دعوني أضع صيغة مريخية من اختراعي ليس هناك سبيل لإثبات صحتها من عدمه أو علاقتها بالموضوع ، و لنكتب لأي عددين a , b :

$$3 = a^{ix} - b$$

و التي منها :

$$x = \frac{\ln(3+b)}{i \ln a}$$

و إذا قمنا بالتعويض في المعادلة الأصلية ستتحقق المعادلة رغم استخدامي لصيغة لا أدري من أين جئتُ بها ؛ و ذلك ببساطة لأننا قمنا بحل معادلتين آتيتين إحداهما المعادلة المخترعة و الثانية هي المعادلة الأصلية . أي أننا قمنا بحل الجملة الرياضية التالية :

$$(y^2 + 2y - 15 = 0) \wedge (y = a^{ix} - b)$$

و ذلك يعني أننا في تقييمنا لأي نسق رياضيائي نستخدمه لحل مشكلة ما ، يجب علينا أن نثبت صحة المنطق و الفنيات الرياضياتية معاً (Logical And) . فنحن قد نستخدم فنيات رياضية صحيحة رغم كوننا نسير في الطريق الخاطيء من الوجهة المنطقية . و يمكن صياغة ذلك رمزياً كالتالي :

$$L \wedge M \equiv S$$

حيث :

- L : الإتجاه المنطقي المستخدم في حل المشكلة Logical Approach .
- M : الفنيات الرياضياتية المستخدمة في حل المشكلة Mathematical Techniques .
- S : النسق أو النموذج المستخدم الذي نعمل في إطاره لحل المشكلة Whole System or Model .

و عليه لا يمكن أن يصح النسق الرياضي S إلا بصحة الإتجاه المنطقي L و الفنيات الرياضياتية M معاً .

ولكم جميعاً جزيل الإحترام و التقدير .. ،

ياسر