

طريقة إيجاد الجذور الحقيقية لكثير الحدود

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

إن لكثير الحدود جذور وكلمة جذور تعني القيم التي إذا عوضت في المعادلة جعلت قيمته مساوية للصفر، وإن لأي معادلة يكمن أن يكون لها نوعين من الجذور إما حقيقية أو عقدية (تخيلية) وسنتحدث الآن عن كيفية إيجاد الجذور الحقيقية لأي معادلة.

مراحل إيجاد الجذور:

- ١- تحديد المجال العام لوجود الجذور.
- ٢- تحديد عدد الجذور.
- ٣- تحديد مجال وجود كل جذر من الجذور.
- ٤- إيجاد الجذر ضمن مجال من المجالات.

أولاً: تحديد مجال الكلبي (العام) للجذور الحقيقية لكثير حدود ما:

نعمد في تحديد ذلك على مبدأ كولتس:

لتكن لدينا المعادلة الجبرية

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ أمثال حقيقة، ولتكن:

$$A = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$$

$$B = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}$$

عندئذ فإن جذور المعادلة السابقة محصورة في الحلقة الدائرية $r < |x| < R$ حيث:

$$r = \frac{1}{1 + \frac{B}{|a_n|}}; R = 1 + \frac{A}{|a_0|}$$

وحيث إن r و R هما الحدان الأصغر والأكبر للجذور الحقيقية الموجبة للمعادلة:

$$P_n(x) = 0$$

و $-R$ و $-r$ هما الحدان الأصغر والأكبر للجذور السالبة.

مثال (١)

$$5x^3 - 20x + 3 = 0 \text{ حدّد منطقة جذور المعادلة}$$

الحل:

لدينا هنا:

$$B = 20, |a_n| = 3, A = 20, |a_0| = 5$$

وبالتالي فإن:

$$R = 1 + \frac{A}{|a_0|} = 1 + \frac{20}{5} = 5$$

$$r = \frac{1}{1 + \frac{B}{|a_n|}} = \frac{1}{1 + \frac{20}{3}} \approx 0.131$$

عندئذ إذا كانت الجذور الحقيقية للمعادلة:

$$5x^3 - 20x + 3 = 0$$

موجودة (وهي حتماً موجود لأن المعادلة من درجة فردية وذلك لأن عدد الجذور العقدية هو عدد زوجي دوماً) فهي متوضعة في المجال $(-5, 5)$ بحيث أن الجذور السالبة متوضعة في المجال $(-5, -0.131)$ والموجبة في المجال $(0.131, 5)$

ثانياً: تحديد عدد الجذور:

لتحديد عدد الجذور الحقيقية والعقدية لكثير حدود نتبع مبدأ شتورم:

إذا كانت جميع الجذور الحقيقية للمعادلة الجبرية $P_n(x) = 0$ موجودة ضمن المجال (a, b) نوجد المشتق الأول $P'_n(x)$ ونقسّم عليه كثير الحدود $P_n(x)$.
ونعكس إشارات باقي القسمة ونرمز لذلك بالرمز $R_1(x)$.

نقسم بعد ذلك $P'_n(x)$ على $R_1(x)$ ، ونعكس إشارة باقي القسمة ونرمز له بالرمز $R_2(x)$ نتابع العملية حتى يصبح قيمة الباقي قيمة ثابتة، نأخذ تلك القيمة بإشارة معاكسة، فنحصل على المتتالية التالية:

$$P_n(x), P'_n(x), R_1(x), R_2(x), \dots, R_{m-1}(x), R_m = \text{const}$$

نعوض في هذه المتتالية القيمة a بدل x ومن ثم القيمة b ونحسب عدد تغيرات الإشارة في كلتا الحالتين، ونرمز لذلك بالرمز $W(a)$ و $W(b)$.

عندئذ يكون $W(a) \geq W(b)$ ، والفرق $W(a) - W(b)$ يساوي عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $P_n(x)$ والموجودة بين القيمتين a و b .

يمكن استخدام مبدأ شتورم في تحديد عدد الجذور السالبة الحقيقية للمعادلة: $P_n(x) = 0$ [في المجال

$$(-\infty, 0) \text{ أي } (-a, 0) \text{ فنستخدم العلاقة: } W(-a) - W(0)$$

وكذلك عدد الجذور الموجبة [في المجال $(0, +\infty)$ أي $(0, +b)$ فنستخدم العلاقة $W(0) - W(b)$

ونحن نعلم أن لأي كثير حدود عدد جذور يساوي درجة أعلى قوة وبالتالي إذا علمنا عدد الجذور الحقيقية فيمكننا معرفة عدد الجذور العقدية وذلك بطرح عدد الجذور الحقيقية من درجة أعلى قوة في معادلة كثير الحدود فنحصل على عدد الجذور العقدية وتجدر الإشارة إلى أن عدد الجذور العقدية لأي كثير الحدود هو عدد زوجي.

لنأخذ مثال على مبدأ شتورم:

$$5x^3 - 20x + 3 = 0 \quad \text{حدد عدد الجذور الحقيقية للمعادلة:}$$

الحل:

نضع جملة توابع شتورم لدينا

$$P_n(x) = 5x^3 - 20x + 3$$

$$P'_n(x) = 15x^2 - 20$$

لتحديد $R_1(x)$ نقسم $P_n(x)$ على $P'_n(x)$ فنجد:

$$\begin{array}{r}
\frac{x}{3} \\
15x^2 - 20 \overline{) 5x^3 - 20x + 3} \\
\underline{\mp 5x^3 \pm 6.667x} \\
0 \quad -13.333x + 3
\end{array}$$

أي أن $R_1(x) = 13.333x - 3$ (أخذنا الباقي بإشارات معاكسة).

طلما أن في $R_1(x)$ كان أيضا كثير حدود (أي ثابت) فنسحب $R_2(x)$ وذلك بتقسيم $P'_n(x)$ على $R_1(x)$ فنجد:

$$\begin{array}{r}
1.125x + 0.235 \\
13.333x - 3 \overline{) 15x^2 - 20} \\
\underline{\mp 15x^2 \pm 3.375x} \\
3.375x \quad - 20 \\
\underline{\mp 3.375x \pm 0.759} \\
-19.241
\end{array}$$

بما أن الباقي هو قيمة ثابتة فتنتهي بذلك عمليات القسمة ويكون $R_2(x) = 19.241$ (أخذنا الباقي بإشارة معاكسة).

نضع إشارات التوابع الداخلة في جملة شتورم في الجدول التالي:

x	$P_n(x)$	$P'_n(x)$	$R_1(x)$	$R_2(x)$	$W(x)$
-5	-	+	-	+	3
0	+	-	-	+	2
+5	+	+	+	+	0

الإشارات في الجدول ناتجة عن تعويض قيم x في المعادلات وأخذ الإشارة الناتجة فقط. أما $W(x)$ فهي تمثل عدد مرات تغير الإشارة في جملة التوابع لقيمة x .

يتضح من الجدول السابق وجود ثلاثة جذور في المجال $(-5, +5)$ وهو المجال الذي حددناه في الخطوة الأولى حسب مبدأ كولتس.

حيث عدد الجذور الحقيقية للمعادلة هو $W(-5) - W(+5) = 3 - 0 = 3$.

واحد منها سالب وذلك من $W(-5) - W(0) = 3 - 2 = 1$

وإثنان منها موجبان $W(0) - W(+5) = 2 - 0 = 2$

ثالثاً- تحديد مجال وجود كل جذر من الجذور: (أو ما يسمى بعزل الجذور)

ويتم ذلك بالإعتماد على جدول شتورم السابق وذلك باختصار المجالات إلى طول يساوي الواحد:

x	$P_n(x)$	$P'_n(x)$	$R_1(x)$	$R_2(x)$	$W(x)$
-5	-	+	-	+	3
-4	-	+	-	+	3
-3	-	+	-	+	<u>3</u>
-2	+	+	-	+	<u>2</u>
-1	+	-	-	+	2
0	+	-	-	+	<u>2</u>
1	-	-	+	+	<u>1</u>
2	+	+	+	+	<u>0</u>
3	+	+	+	+	0
4	+	+	+	+	0
+5	+	+	+	+	0

يتضح من الجدول السابق أن الجذور واقعة في المجالات:

$(-3, -2), (0, 1), (1, 2)$

رابعاً: إيجاد الجذر ضمن مجال من المجالات:

ولنعين ذلك هناك أكثر من طريقة مثل طريقة تنصيف المجال أو طريقة ريغولافالسي

طريقة ريغولافالسي: إن مبدأ طريقة ريغولافالسي تعتمد على أنه إذا علمنا قيمتين لـ x_1, x_2, x للتابع $y = f(x)$ بحيث أن التابع يأخذ في هاتين النقطتين القيمتين $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ وبحيث أن كلاهما من y_1, y_2 لهما إشارتين مختلفتين، عندئذ فإن التابع $y = f(x)$ يملك بين هاتين النقطتين x_1, x_2 جذراً للتابع $y = f(x)$ ومنه حل المعادلة $f(x) = 0$.
كما نلاحظ فإن طريقة ريغولافالسي تحتاج إلى قيمتين إبدائيتين (هما طرفي المجال المعطى للجذر المراد إيجاده).

خطوات خوارزمية طريقة ريغولافالسي هي:

١. نوجد كلاهما من إشارتي $f(x_n)$ و $f(x_{n+1})$ فإذا كانتا مختلفتين

٢. نحسب x^* و $f(x^*)$ من الدستور $x^* = x_n - f(x_n) * \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$

٣. إذا كان لـ $f(x^*)$ و $f(x_n)$ نفس الإشارة نضع عندئذٍ $x_n = x^*$ و $f(x_n) = f(x^*)$ وإلا نضع $x_{n+1} = x^*$ و $f(x_{n+1}) = f(x^*)$

٤. إذا كانت $f(x^*)$ صغيرة بقدر كاف نتوقف عن الحساب ويكون x^* هو الجذر المطلوب وإلا

٥. إذهب إلى الخطوة (٢).

مثال: من التمرين السابق وجدنا أن لكثير الحدود ثلاث جذور حقيقية وقد قمنا بتحديد مجال وجود كل جذر من الجذور لنختار مجال من هذه المجالات وذلك لإيجاد قيمة هذا الجذر ضمن طريقة ريغولافالسي.

ليكن المجال (1, 2) إن $x_n = 1$ وبالتالي $f(x_n) = -12$ ، $x_{n+1} = 2$ وبالتالي $f(x_{n+1}) = 3$ لنحسب كلاهما من x^* و $f(x^*)$

$$x^* = x_n - f(x_n) * \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} = 1 - (-12) * \frac{2 - 1}{3 - (-12)} = 1.8$$

$$f(x^*) = -3.84$$

والآن حسب الخطوة ٣ نجد أن: $x_n = 1.8$ وبالتالي $f(x_n) = -3.84$

طالما أن $f(x^*)$ ليست صغيرة بقدر كاف (يجب أن تكون مساوية للصفر أو قريبة من الصفر حتى يكون x^* هو الجذر المطلوب) نذهب إلى الخطوة ٢.

لنعيد حساب كلاً من x^* و $f(x^*)$

$$x^* = 1.8 - (-3.48) * \frac{2 - 1.8}{3 - (3.84)} = 1.9123$$

$$f(x^*) = -0.2806$$

والآن حسب الخطوة ٣ نجد أن: $x_n = 1.9123$ وبالتالي $f(x_n) = -0.2806$ طالما أن $f(x^*)$ ليست صغيرة بقدر كاف نذهب إلى الخطوة (٢).

$$x^* = 1.9123 - (-0.2806) * \frac{2 - 1.9123}{3 - (-0.2806)} = 1.9198$$

$$f(x^*) = -0.0176$$

والآن حسب الخطوة ٣ نجد أن: $x_n = 1.9198$ وبالتالي $f(x_n) = -0.0176$ طالما أن $f(x^*)$ ليست صغيرة بقدر كاف نذهب إلى الخطوة (٢).

$$x^* = 1.9198 - (-0.0176) * \frac{2 - 1.9198}{3 - (-0.0176)} = 1.92$$

$$f(x^*) = -0.01056$$

وهكذا حتى نصل إلى الجذر المطلوب.

طريقة تنصيف المجال:

لحساب قيمة جذر حقيقي لكثير الحدود ضمن مجال معين ليكن $[A, B]$ ، يجب معرفة فيما إذا كان هناك جذر أم لا ضمن هذا المجال وذلك بإيجاد قيمة كثير الحدود عند أول المجال A وآخره B ، فإن اختلفت إشارتا القيمتين عن بعضهما البعض أي أن أحدهما سالب والآخر موجب فإن هناك حتماً جذراً ضمن هذا المجال، وإلا فإنه لا يوجد ضمن هذا المجال جذر حقيقي لكثير الحدود. إذا فرضنا أن هناك فعلاً جذر ضمن المجال، سنقوم الآن باستخدام مبدأ التقسيم الثنائي. تعتمد هذه الطريقة على تصغير مجال البحث عن الجذر إلى النصف في كل مرة نقوم فيها بالبحث عن الجذر، وسنستمر في عملية التصغير تلك حتى نصل إلى الجذر.

عملياً قد لا نصل إلى الجذر أبداً لأن النتائج ستكون تقريبية (يعتمد ذلك على دقة النتائج التي حصلنا عليها).

خوارزمية طريقة تنصيف المجال هي:

١. أوجد إشارة كلا من $f(x_{n+1})$ و $f(x_n)$ حيث x_{n+1} ، x_n هما طرفي المجال، فإذا كانتا من إشارتين مختلفتين.

٢. نحسب x_{mid} و $f(x_{mid})$ من الدستور $x_{mid} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$

٣. إذا كان $f(x_{mid})$ و $f(x_n)$ نفس الإشارة نضع

$$x_n = x_{mid}$$

$$f(x_n) = f(x_{mid})$$

وإلا نضع

$$x_{n+1} = x_{mid}$$

$$f(x_{n+1}) = f(x_{mid})$$

٤. إذا كانت $f(x_{mid})$ صغيرة بقدر كاف نتوقف عن الحساب وإلا

٥. إذهب إلى الخطوة (٢).

مثال: لنأخذ مجال آخر من مجالات الجذور التي أوجدناها سابقاً لكثير الحدود $5x^3 - 20x + 3 = 0$

وليكن المجال $(0, 1)$ لنطبق خوارزمية تنصيف المجال نجد:

إن $x_n = 0$ وبالتالي $f(x_n) = 3$ و $x_{n+1} = 1$ وبالتالي $f(x_{n+1}) = -12$ لاحظ أن إشارتي $f(x_n)$

و $f(x_{n+1})$ مختلفتين لنتقل إلى الخطوة ٢.

$$x_{mid} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} = \frac{1 + 0}{2} = 0.5$$

$$f(x_{mid}) = -6.375$$

بتطبيق الخطوة ٣ نجد أن: $x_{n+1} = 0.5$ و $f(x_{n+1}) = -6.375$

طالما أن $f(x_{mid})$ ليست صغيرة بقدر كاف نذهب إلى الخطوة (٢).

$$x_{mid} = \frac{0.5 + 0}{2} = 0.25$$

$$f(x_{mid}) = -1.922$$

بتطبيق الخطوة ٣ نجد أن: $x_{n+1} = 0.25$ و $f(x_{n+1}) = -1.922$ طالما أن $f(x_{mid})$ ليست صغيرة بقدر كاف نذهب إلى الخطوة (٢).

$$x_{mid} = \frac{0.25 + 0}{2} = 0.125$$

$$f(x_{mid}) = 0.5098$$

بتطبيق الخطوة ٣ نجد أن: $x_n = 0.125$ و $f(x_n) = 0.5098$ طالما أن $f(x_{mid})$ ليست صغيرة بقدر كاف نذهب إلى الخطوة (٢).

$$x_{mid} = \frac{0.25 + 0.125}{2} = 0.1875$$

$$f(x_{mid}) = -0.717$$

بتطبيق الخطوة ٣ نجد أن: $x_{n+1} = 0.1875$ و $f(x_{n+1}) = -0.717$ طالما أن $f(x_{mid})$ ليست صغيرة بقدر كاف نذهب إلى الخطوة (٢).

$$x_{mid} = \frac{0.1875 + 0.125}{2} = 0.15625$$

$$f(x_{mid}) = -0.106$$

وهكذا حتى نصل إلى الجذر المطلوب.

وبذلك تم بعونه تعالى شرح طريقة إيجاد الجذور الحقيقية لأي كثير حدود.

المراجع التي تم الإعتماد عليها:

١. التحليل العددي للدكتور: محمد غشيم، منشورات جامعة حلب كلية الهندسة المعلوماتية.
٢. الخوارزميات والبرمجة للدكتور: سعد الدين العبد الله، منشورات جامعة حلب كلية العلوم.
٣. الخوارزميات وبنى المعطيات إعداد المهندس: رامي القضماني، منشورات دار شعاع.

إعداد الطالب: عبد الكريم كنعان