

Architecture (ASR1 et ASR2)

TP N° 2

1 Objectifs

Ce TD traite de l'algèbre de Boole et la logique combinatoire. Les techniques de simplification d'expressions booléennes sont mises en pratique ainsi que la représentation par circuits. Les fonctions booléennes, les tableaux de karnaugh et les logigrammes seront abordées en fin de TP.

Les exercices non terminés en TD devront être terminés chez vous pour la prochaine séance.

2 Exercice 1

Montrez comment l'opérateur **et** peut être obtenu à partir des opérateurs **ou** et **non**. Faites de même pour l'opérateur **ou** avec les opérateurs **et** et **non**.

On note respectivement les opérateurs **ou**, **et**, **xor** et **non** par $+$, $.$, $\oplus$ et $\bar{}$

Montrez à l'aide **des tables de vérité** que :

$$A \oplus B = \bar{A}.B + A.\bar{B} \text{ et que } A \oplus B = (A + B).(\bar{A} + \bar{B})$$

3 Exercice 2 : Simplification d'expression booléenne

Simplifiez au maximum les expressions logiques suivantes.

$$\bar{A}.B + A.B =$$

$$(A + B).(A + \bar{B}) =$$

$$A + A.B =$$

$$A.(A + B) =$$

$$\bar{A}.\bar{B} + \overline{A + B + C + D} =$$

$$A + B.\bar{C} + \bar{A}.\overline{(B.\bar{C})}.(A.D + B) =$$

$$(A \oplus B).B + A.B =$$

$$A + \bar{A}.B + \bar{A}.\bar{B} =$$

4 Exercice 3 : Génération et simplification d'expressions logiques

Soit la fonction F définie par la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Calculez, pour cette fonction, une l'expression logique:

- sous forme de sommes de produits ;
- sous forme de produits de sommes

Architecture (ASR1 et ASR2)

TP N° 2

Construisez le diagramme de Karnaugh et déterminer une expression logique associée.

5 Exercice 4

Soit les fonctions logiques suivantes.

$$F_1(A, B, C) = A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C} + A.B.C$$

$$F_2(A, B, C) = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + A.\bar{B} + A.B.C$$

$$F_3(A, B, C) = \bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{B}.\bar{C} + A.\bar{B}.C$$

Pour chacune d'elles, construisez le tableau de Karnaugh et utilisez ce diagramme pour simplifier ces expressions.

6 Exercice 5

Réalisez un circuit logique qui implémente la fonction F suivante :

$$F = (A + B + C).(A + \bar{B} + \bar{C}).(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

7 Exercice 6

Un générateur de parité impaire est une fonction qui retourne 1 si le nombre de bits à 1 est impair. Définissez cette fonction pour un mot de 4 bits et donnez le circuit logique qui implémente cette fonction.

8 Exercice 7 : Fonctions booléennes à deux variables

Complétez les tables de vérité des fonctions à 2 variables suivantes, après les avoir simplifiées quand c'est possible :

x	y	$f_0=0$	$f_2=x.\neg y$	$f_3=x$	$f_4=\neg x.y$	$f_5=y$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Donnez la forme polynomiale canonique (et simplifiez si possible) des fonctions à 2 variables dont les tables de vérité sont :

x	y					
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0

Si vous avez compris ce que représente l'indice de chaque fonction, écrivez les tables de vérité des fonctions f_1 , f_6 , f_7 , f_8 , f_9 et f_{10} .

x	y						
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

Architecture (ASR1 et ASR2) TP N° 2

9 Exercice 8 : Fonctions booléennes à trois variables

Donnez la forme polynomiale canonique (et simplifiez si possible) de la fonction f à 3 variables dont la table de vérité est :

x	y	z	
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Il est parfois plus facile de calculer la fonction inverse pour trouver la forme canonique polynomiale d'une fonction. Appliquez cette méthode pour déterminer la forme polynomiale canonique de la fonction f suivante :

x	y	z	f	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

10 Exercice 9 : Tableaux de Karnaugh

Construisez le tableau de Karnaugh de la fonction f de la question précédente et retrouvez directement sa forme polynomiale en appliquant la technique de simplification du tableau.

Trouvez les formes polynomiales simplifiées des fonctions associées aux deux tableaux de Karnaugh suivants :

xy zt	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	0

xy zt	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	0	1	0	0
10	0	1	0	0

11 Exercice 10 : Simplification avec un tableau de Karnaugh

Soit la fonction $f(a, b, c, d) = a.b. \neg c + \neg a .d + b.c$ Trouvez une expression simplifiée pour f en utilisant un tableau de Karnaugh.

Architecture (ASR1 et ASR2)

TP N° 2

12 Exercice 11 : Fonction à cinq variables

Trouvez, en construisant 2 tableaux de Karnaugh, (l'un pour $x=0$, l'autre pour $x=1$) l'expression simplifiée de la fonction $f(x,y,z,t,u)$ associée à la table de vérité suivante (coupée en 4 pour la présentation) :

$xyztu$	f	$xyztu$	f	$xyztu$	f	$xyztu$	f
00000	0	01000	1	10000	0	11000	0
00001	0	01001	0	10001	0	11001	1
00010	1	01010	1	10010	1	11010	1
00011	1	01011	0	10011	1	11011	1
00100	0	01100	1	10100	1	11100	1
00101	0	01101	1	10101	0	11101	0
00110	0	01110	1	10110	0	11110	0
00111	0	01111	1	10111	0	11111	0

13 Exercice 12 : Fonction booléenne partiellement définie

Lorsque, pour une raison ou une autre, toutes les configurations des entrées de la fonction booléenne ne peuvent exister, on peut simplifier l'expression de la fonction. En effet, lorsque l'on écrit la forme polynomiale canonique, au lieu de décrire complètement chaque monôme en y faisant figurer toutes les variables (complémentées ou pas), on peut n'utiliser que quelques variables, c'est-à-dire celles dont la combinaison permet de distinguer le monôme considéré de tous les autres monômes possibles.

Appliquez cette technique aux fonctions f_1 et f_2 décrites par les tables incomplètes suivantes :

x	y	z	t	f_1	f_2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1

Proposer une façon de traiter ce cas à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

14 Exercice 13 : Fonction parité paire à trois variables

Cette fonction est définie par :

$f(a, b, c) = 1$ si le nombre de variables à 1 est pair.
 $f(a, b, c) = 0$ sinon

Écrivez la table de vérité de cette fonction

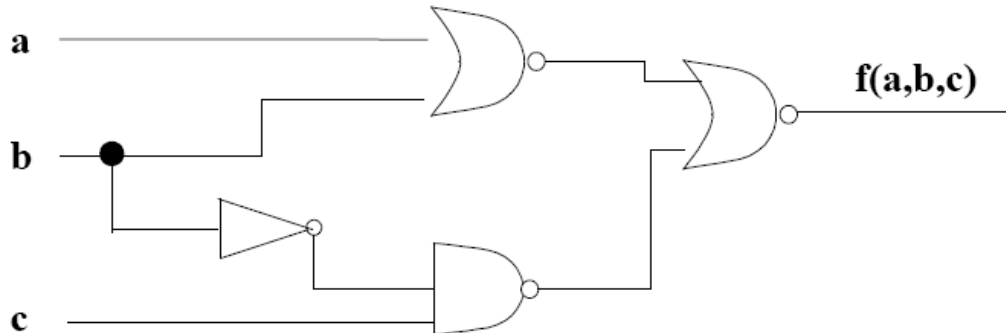
Représentez le tableau de Karnaugh correspondant

Exprimer la forme polynomiale de cette fonction.

Architecture (ASR1 et ASR2) TP N° 2

15 Exercice 14 : Analyse de circuits combinatoires

Donner l'expression booléenne, en la simplifiant, de la fonction f définie par le logigramme :



16 Exercice 15 : conception d'un mini circuit logique

Un générateur de parité paire est une fonction qui retourne 1 si le nombre de bits à 1 est pair. On se limitera dans un premier temps à une fonction ayant un mot de 4 bits comme entrée. (Attention 0 est un nombre pair)

- Ecrivez la table de vérité de cette fonction.
- Construisez le diagramme de Karnaugh et déterminer une expression logique pour cette fonction
- Donnez le circuit logique qui implémente cette fonction (on se limitera à des portes AND et OR à deux entrées et aux portes NOT).