

Numerical Pack 2009 / 2010

Course Map

Sources of Error:

- 1- Human Error
- 2- Finite precision of computer
- 3- Loss of significance
- 4- Truncation error

Representation of integer and float numbers in computer

Converting floating numbers into binary

Error Analysis

Propagation of Error

Methods of solving non linear equations numerically:

- 1- Fixed point iteration method
- 2- Bisection method
- 3- False position method
- 4- Newton method
- 5- Secant method

Interpolation methods:

- 1- Lagrange method
- 2- Newton method
- 3- Piecewise method
- 4- Basis cubic Spline method

Curve Fitting methods:

- 1- Least Square Line method
- 2- Weighted Least Square Polynomial Approximation

Numerical Integration:

- 1- Newton – Cotes Quadrature Rules
- 2- Composite Rules

Errors:

نسبة الخطأ هي الفرق بين ال Exact Solution وال Approximated Solution و في اكثر من طريقة اقدر احسب بينها ال Error ده:

(1) Exact Error:

Let A be the Exact Solution and $A^{\sim}$ be the Approximated Solution then

$$\text{The Exact Error} = A - A^{\sim}$$

نظرا للقانون ده اقدر اقول ان الحل ممكن يكون سالب او موجب و بما ان الاشارة مش مهمه انما المقدار هو المهم فا توصلوا للطريقة الثانيه لحساب ال Error

(2) Absolute Error:

$$= |A - A^{\sim}|$$

هو نفس القانون اللي فوق بس هزود ال Absolute بس

(3) Relative Error:

$$= \frac{|A - A^{\sim}|}{|A|}$$

ودى الطريقة اللي هنستخدمها على طول لانها More Accurate

(4) Percentage Error:

$$= \frac{|A - A^{\sim}|}{|A|} * 100 \%$$

نفس اللي فوق مجرد هزود النسبه بس

EX:

لو فرضنا ان انا عندى عدد كسرى زي مثلا $\frac{1}{3}$ المفروض ان واحد على 3 بيساوى كام؟

$$\frac{1}{3} = 0.333333 \dots$$

النقط دى يعنى الى مالا نهاية طيب انا عايزه اتأكد هل فعلا العدد العشري اللي طلعتة ده بيساوى واحد على 3 و لا لا

هبعص كده على الطرف اليمين هلاقى انه بيساوى:

$$0.333 \dots = 3 * 10^{-1} + 3 * 10^{-2} + 3 * 10^{-3} + \dots$$

و بالتالى هلاقى ان دى عبارته عن Infinite Geometric Series و علشان اعرف مجموعها هطبق القانون اللى بيقول:

$$\frac{a}{1-r}, r < 1$$

a is the first term in the series and r "is the bas"

وبالتعويض فى القانون ده هلاقى ان:

$$= \frac{3 * 10^{-1}}{1 - 10^{-1}} = \frac{3}{10 - 1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

يبقى فعلا صح كده

$$\text{Assum } \frac{1}{3} \approx 0.333 = A^{\sim}$$

عايزه بقى اطلع ال Error بين الحل ده و الحل ال Exact بالطرق اللى قلنا عليها

(1) Exact Error:

$$\frac{1}{3} - 0.333 = 0.00033333 \dots$$

(2) Relative Error:

$$\frac{0.0003333}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} * 10^{-3}}{\frac{1}{3}} = 10^{-3}$$

(3) Percentage Error:

$$RE * 100 \% = 10^{-3} * 100 \% = 0.1\%$$

Problem to be solved later:

$$\sum_{1}^{100000} 0.1$$

الطبيعى ان انا لو جمعت 0.1 على نفسها 100000 مره الناتج هيطلع 10000 وده الحل ال Exact

لكن لو طلبت من اى كمبيوتر يحل المسأله دى مش هيطلع الحل ده ابدأ هيطلع دايما حاجه قريبه منه مثلا 9999.99447 طيب ليبيبيه؟

الاجابه ان الكمبيوتر ميقدرش يخزن الرقم فى Infinite number of bits

هنعرف ازاي بقى بالتفصيل قدام خلوها فى بالكوا يعنى دى المشكله اللى عايزين فى اخر المحاضره نفهمها ☺

Sources of Error

1- Human Error

فى عندنا مبدأ كده هنتفق عليه ان احتمال الخطأ البشرى = 0 واحد مركز اوى يعنى

Human Error = Zero

2- Finite Precision of Computer

Representation of integer and float numbers in computer

Integer Number:

لو افترضنا انا مثلا عندى الرقم ده :

$$(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1)_2 \rightarrow \rightarrow = (173)_{10}$$

و هخزن الرقم ده فى 16 bit هيبقى عندى 15 bit الللى فى الاول احط فيهم الرقم و اخر bit ده بتاع ال sign لو كان 1 يبقى العدد ده سالب و لو كان 0 يبقى العدد ده موجب

طيب لو بصيت للرقم ده هلاقى انه اصلا 8 bit الباقى ده هحط فيه ايه ؟ هحط فيه اصفار

0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

الارقام الللى لونها ازرق دى بتاعت العدد نفسه و الاسود دى الاصفار الللى زودناها و اخر واحد الللى لونه شبه الاحمر ده بتاع ال Sign و خليفاه 0 علشان العدد موجب.

Floating Number:

ده بقى اهم حاجه و الللى هنشغل بيه على طول تقريبا

علشان اخزن عدد float لازم اعمله حاجه اسمها Normalization يعنى احطه فى الصورة دى:

$$X = q * 2^n$$

$$0.5 \leq q < 1$$

ال q حاجه اسمها ال Mantissa عليها شرط ان اصغر قيمه ممكن تاخدها هى 0.5 و اكبر قيمه واللى مش ممكن هتوصلها هى الواحد و طبعا دى بتبقى عدد binary و ليها شرط كمان ان اول رقم بعد ال point لازم يكون 1 مهما حصل يعنى

هنشوف امثله كده علشان توضح الدنيا شويه:

Ex:

$$\text{if } X = 0.0001101$$

لو عايزين نخلى العدد ده فى صورته اقدر اخزنه بيها فى الكمبيوتر هعمله normalization

ازای بقی اول حاحه لازم اجیب ال Mantissa علشان اجیها هحرك العلامة بتاعت العدد العشری 3 مرات ناحیه الیمین علشان یبقی اول حاحه علی یمین العلامة رقم 1 زی ما الشرط بیقول و بما انی هحركها یمین یبقی اکنی بضرب فی 2^{-1} فی کل مره بحركها فیها یعنی هتبقی کده:

$$X = 0.1101 * 2^{-3}$$

لان انا حرکتها 3 مرات لحد ما وصلت للواحد

طیب لو افترضنا ان:

$$X = 1101.0011$$

طبعا ال Mantissa لازم تبقی اقل من 1 فا هنا هحرك العلامة ناحیه الشمال لحد الاخر فا العدد هیبقی کده

$$X = 0.11010011 * 2^4$$

هنا خلیت ال power 4 لان انا حرکت العلامة 4 مرات ناحیه الشمال یبقی هتأخذ اشاره موجبة

نشوف بقی بعد ما حولنا العدد ده للصوره اللى اقدر اخزنه علیها ازای بقی هخزنه بالطبط ؟

اولا لازم ابقی عارفه انا هخزنه فی کام bit و لنفترض ان انا هخزن اخر X اتکلمنا علیها فی 16 bit

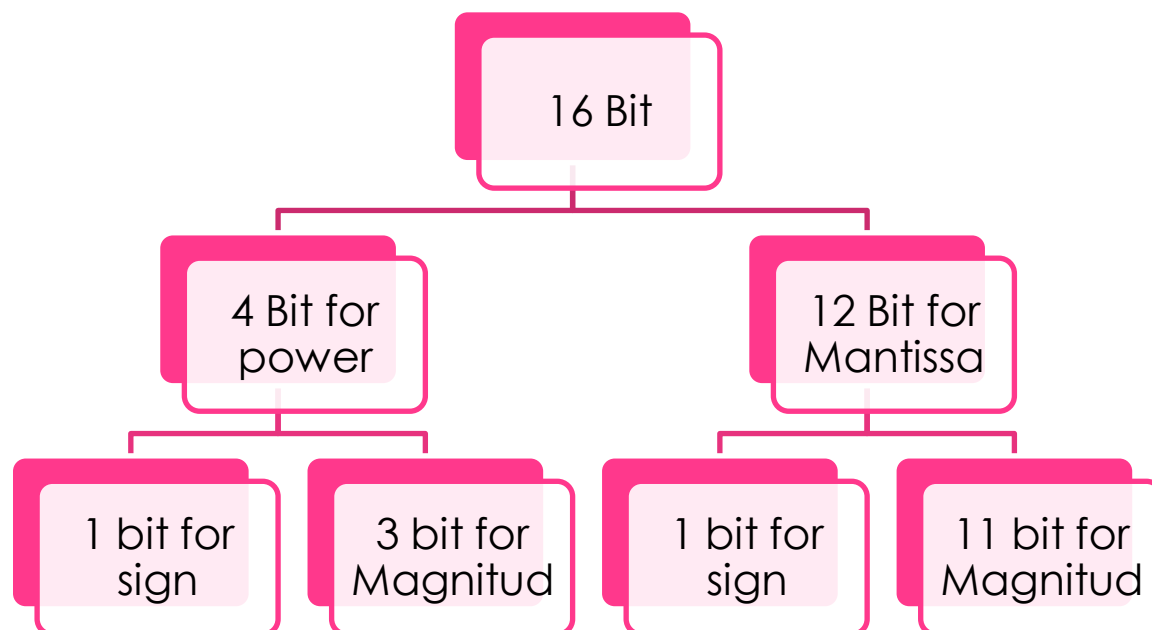
$$X = 0.11010011 * 2^4$$

ال 16 bit دول او ایا ان كان عددهم هقسمهم جزئین جزء بیساوی الربع و الجزء الثانى بیساوی الباقي

یعنی ال 16 هیتقسموا ل 4 bit و 12 bit دائما الجزء اللى بیمثل الربع بخزن فيه ال power و الجزء الباقي بخزن فيه ال Mantissa

ال 4 bit بتوع ال power هقسمهم 1 bit علشان احط فيه ال sign بتاع ال power و 3 علشان الرقم نفسه

و ال 12 bit بتوع ال Mantissa هقسمهم برضوا 1 bit علشان ال sign و ال 11 الباقيین علشان الرقم نفسه.



نشوف بقى ازای هـنـحـطـهـم بالـظـبط:

0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

اللى بالازرق ده ال Mantissa و الاسود ده ال power و اول bit الى لونه غامق شويه ده ال sign
بتاعت ال Mantissa واللى بعديه ده ال sign بتاعت ال power

و كده بيقى انا خزنت الرقم الحمد لله ☺

هـنـاـخـد بـقـى مـثـال عـلـى 32 bit computer و نشوف كده هـنـخـزن فـيـه اـزـاى ؟

EX:

Computer that represent floating point number in 32 bit (8 bit for exponent (power) and 24 bit for Mantissa)

- Calculate the largest represent able positive number?
- Calculate the smallest represent able positive number?
- Total number of represent able real numbers?

اول حاجه هوا عايز يعرف اكبر رقم ممكن اخزنه فى الجهاز ده يعنى عايزه اعرف ايه اكبر رقم X ممكن اخزنه

طيب يبقى انا عايزه اجيب :

$$X_{\max} = q_{\max} * 2^{n_{\max}}$$

اول حاجه هشوف ال mantissa هى بتتخزن فى 23 bit لان اخر واحد ده بتاع ال Sign يبقى انا عايزه mantissa فيها 23 bit و بما ان انا معنديش غير 0 و 1 وانا عايزه اكبر حاجه يبقى هحطها كلها 1 فى ال 23 bit

$$q_{\max} = 0.111111111111111111111111$$

الكلام ده لما احب احوله ل series هتبقى بالشكل ده

$$q_{\max} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-23}$$

و دى عبارته عن Finite Geometric Series و علشان اعرف مجموعها هستخدم القانون:

$$Sum = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

هنا ال n هى عدد الحدود وبالتعويض هيبقى:

$$= \frac{2^{-1}(1 - (2^{-1})^{23})}{1 - 2^{-1}} = (1 - 2^{-23}) \approx 1 = q_{\max}$$

طبعا احنا اتفقنا ان اكبر قيمه لل mantissa واللى مش ممكن توصلها هى الواحد و هنا طلع القيمه واحد ناقص 2^{-23} و دى طبعا مفرقتش كثير عن الواحد هى اقل منه بجزء قليل جدا!!!!

نشوف بقى ال n

نفس الكلام ال n بتتخزن فى 8 bit واحد منهم لل sign يبقى فاضل 7 bit هما دول اللى هحط فيهم الرقم و بما انى عايزه اكبر حاجه يبقى هحطهم كلهم 1 يبقى هتبقى كده

$$n_{\max} = 1111111 = (127)_{10}$$

يبقى اكبر Power ممكن احطه هوا 127 يبقى كده وصلت لأكبر رقم ممكن اخزنه اللى هوا

$$X_{\max} = (1 - 2^{-23}) * 2^{127} \approx 2^{127}$$

بس كده

نشوف بقى تانى حاجه اللى هى اصغر رقم ممكن اخزنه و دى سهله

$$X_{\min} = q_{\min} * 2^{n_{\min}}$$

نشوف الاول ال mantissa و احنا متفقين من قبل كده ان اصغر رقم ممكن تاخده هوا 0.5 اللى بيساوى 0.1 binary فى

أما ال Power فا اعلى قيمه ليه كانت 127 ببقى اكيد اقل قيمه ليه هى -127 ☺
ببقى اصغر رقم هوا:

$$X_{\min} = 0.1 * 2^{-127} \approx 2^{-128}$$

آخر مطلوب بقى بيقول عايز يعرف عدد الارقام اللى ممكن اخزنها فى الكمبيوتر ده
اولا اشوف هوا ال power بياخد كام bit ؟

بياخد 8 طيب و ايه هى الاحتمالات بتاعت الارقام فيهم ؟
مفيش غير يا 0 يا 1

ببقى كده عدد ال power هيكون

$$n = 2^8$$

و طيب و نفس الكلام على ال Mantissa ؟

لا هنا هراعى حاجه ان مش كل ال 24 bit بيتغيروا لان اول bit بعد العلامة العشرية لازم يكون 1

ببقى انا عندى مكان ثابت و 23 بس اللى بيتغيروا

ببقى عدد ال mantissa هيبقى

$$q = 2^{23}$$

ببقى عدد الارقام كلها

$$= 2^8 * 2^{23} = 2^{31}$$

بس عدد بسيط اهو ☺

Converting floating numbers into binary

زمان كده كنا اتعلمنا ازاي نحول الاعداد الكسرية والعشرية من ال decimal لل binary

هنفتكر بقى الحوار ده كان بيتم ازاي؟

لو اخدنا عدد و لنفترض

$$R = \frac{1}{10}$$

علشان احوله لل binary اول حاجه هضربه فى 2 و العدد اللى هيطلع هقسمه جزئين جزء صحيح و جزء عشري و اضرب الجزء العشري فى اثنين و اقسم الرقم الى طلع و هكذا لحد ما اول جزء عشري طلع من اول عملية ضرب يتكرر تانى و لو متكررش خلاص هقف على عدد الارقام بعد العلامة الى انا عايزاهم

نطبق الكلام الغريب ده

اول حاجه اضرب الرقم فى 2

$$2R = 0.2$$

نقسم الرقم ده جزء صحيح و جزء عشري

$$d_1 = 0 \quad f_1 = 0.2$$

و نضرب الجزء العشري فى 2 تانى و نقسمه

$$2f_1 = 0.4$$

$$d_2 = 0 \quad f_2 = 0.4$$

و نضرب تانى

$$2f_2 = 0.8$$

$$d_3 = 0 \quad f_3 = 0.8$$

متعلقوش فى واحد هايجى اهو ☺

$$2f_3 = 1.6$$

$$d_4 = 1 \quad f_4 = 0.6$$

$$2f_4 = 1.2$$

$$d_5 = 1 \quad f_5 = 0.2$$

هنا لقيت ان اول جزء عشري طلع اتكرر تانى خلاص اقف كده لانه هبفضل يكرر ال Sequence دى الى مالا نهاية بقى

طيب فين العدد ال binary هنا ؟

العدد ال binary هي الارقام اللى طلعت فى الجزء الصحيح

$$R_2 \approx 0.000110011 \dots$$

طيب ده بقى حل المشكله اللى كنا سبينها فوق دى

ان الكمبيوتر مش بيقدر يخزن الى مالا نهاية فا لما بيقابله رقم زى ده و عايز يخزنه بيعمل حاجه من اتنين

يا اما يعمل chopping او يعمل rounding و ال rounding اصح

طيب يعنى ايه يعمل chopping ؟ يعنى هيفضل يخزن ال bits لحد لما يفوق المساحه اللى عنده يقوم يرمى باقى الرقم ولا اكنه شايفه

طيب وال rounding ؟ ال rounding بقى بيص على الرقم اللى المفروض يقف عنده يعنى لو قلنا احنا بنتعامل مع 16 bit computer ببقى كده هوا هيخزن الكلام ده فى 11 bit بتوع ال mantissa فا هينقل 11 bit من الرقم زى ما هما و يبص على رقم 12 لو لقاها 0 خلاص هينفض للباقي كله ولا اكنه شايفه و يكمل على كده لكن لو لقاها 1 هيجمع واحد على ال 11 bit اللى موجودين عنده دول

طيب ده كده بقى اللى هوا ال Error اللى قلنا هنتكلم عليه فى الاول اللى هوا

Finite precision of computer

و ده اللى عمل مشكله فى المسأله اللى سبينها فوق انه مبيقدرش يخزن الى مالا نهاية فا لازم يستغنى عن شويه bits كده علشان يكمل و كل مره بيسيب حاجه بيحصل نسبه error وبالتالي مش بيطلع النتيجة بتاعت ال summation صح و ان كان بيطلع ناتج قريب منها.

Ex # 1:

Find Exact (E) and Relative (E_R) Error:

$$A = 10.147 \text{ \& } A' = 10.159$$

$$E = 10.147 - 10.159 = 0.012$$

$$E_R = \frac{0.012}{10.147} = 0.0011826$$

Ex # 2:

Convert to Decimal:

$$1- 10101)_2$$

$$\begin{aligned} &= 1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2 + 0 * 2^3 + 1 * 2^4 \\ &= 1 + 4 + 16 \\ &= (21)_{10} \end{aligned}$$

$$2- 0.11011)_2$$

$$= 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 0 * 2^{-3} + 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-5}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{27}{32}$$

$$3- 11.0010010001)_2$$

$$= 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^{-3} + 1 * 2^{-6} + 1 * 2^{-10}$$

$$= 1 + 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{1024} = 3.1416015$$

Ex # 3:

If $\sqrt{2} = 1.4142136237309)_{10}$ exactly and $\approx 1.0110101)_2$ approximately Find the error:

هوا هنا بيقول ان قيمه جذر 2 بالطبط هي القيمه دى و قال ان القيمه دى تقريبا فى ال Binary
بتساوى اللى هوا قاله ده و عايزنا بقى نطلع قيمه ال Error

طيب هوا اصلا ال Error عبارته عن ال قيمه ال Exact ناقص القيمه ال Approximated خلى بالكوا
ان القيم دى بتبقى بال Decimal بس انا عندى القيمه ال Approximated بال Binary ببقى
هحولها ل Decimal علشان اعرف اطرحها من ال Exact

$$1.0110101 = 1.4140625$$

$$E = 1.414213 - 1.41406 = 0.000151$$

Ex # 4:

Convert to Binary:

$$R = \frac{7}{16}$$

$$2R = 0.875$$

$$d_1 = 0, f_1 = 0.875$$

$$2f_1 = 1.75$$

$$d_2 = 1, f_2 = 0.75$$

$$2f_2 = 1.5$$

$$d_3 = 1, f_3 = 0.5$$

$$2f_3 = 1$$

$$d_4 = 1, f_4 = 0$$

$$2f_4 = 0$$

$$d_5 = 0, f_5 = 0$$

طبعا هنا واضح انه مهما زودت اكثر من كده القيمة دي هتفضل 0 مهما حصل يعنى هيفضل يتكرر معايا و ال Digit ده بنسميه Significant Digit و مش لازم يكون digit واحد بس ممكن يكون مجموعه من ال digits كده بتفضل تكرر نفسها الى مالا نهاية

كده الرقم ده فى ال binary هبقى شكله كده:

$$0.011100$$

Ex # 5:

We have a 16 bit computer (12 → mantissa, 4 → exponent) Find the error in the operation:

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{6}$$

طيب زى ما اتفقنا ال Error هوا الفرق بين ال Exact solution وال Approximated طيب الاول نطلع الحل ال Exact بتاع ال Operation دى:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{7}{15}$$

ده بالقوانين الطبيعى اللى كلنا نعرفها

طيب ايه هوا الحل ال approximated ده ؟

هوا عبارته عن الناتج ال Binary لل Operation دى لما انفذها على ال Computer

طيب هنفذها ازاي؟

اول حاجه هخزن ال 3 ارقام دول فى الكمبيوتر يعنى هعمل لكل واحد فيهم Representation فى ال Memory بنفس الطريقة اللى قلنا عليها فى المحاضرة بالطبط

هاخد كل رقم و احوله Binary و بعدين اجيب ال Mantissa وال Exponent على حسب الكمبيوتر اللى هوا فى الحالة دى 16 bit طيب نشوف الكلام ده طلع نواتج ايه؟

To binary:

$$\frac{1}{10} = 0.00011001100110011$$

$$\frac{1}{5} = 0.0011001100110011$$

$$\frac{1}{6} = 0.001010101010101$$

In memory:

$$\frac{1}{10} = 0.11001100110 * 2^{-3}$$

$$\frac{1}{5} = 0.11001100110 * 2^{-2}$$

$$\frac{1}{6} = 0.10101010101 * 2^{-2}$$

هنا لما نختار ال 11 bit اللى هنعطهم فى ال Mantissa باخد اول 11 bit فى الرقم و بعامله بطريقة ال Rounding يعنى بشوف ال digit رقم 12 لو هوا 0 خلاص مش هعمل حاجه لو هوا 1 هزود واحد على الرقم ال 11 bit اللى انا خدته

دلوقتى بقى ال 3 ارقام متخزين فى الكمبيوتر ناقص بقى نعمل عملية الجمع

بالنسبة للكمبيوتر فا هوا ميقدرش يجمع ال 3 مع بعض فى نفس الوقت فا هوا هياخد اول 2 و يجمعهم و الناتج بتاعهم يخزنه تانى و يجمعه مع اخر رقم

عملية الجمع بقى ليها شروط :

لازم ال power فى الاتنين يبقى متساوى

و لازم عدد ال digits بتاعت ال mantissa فى الاتنين يبقى متساوى

هناخد اول رقمين و نشوف كده:

$$X_1 = 0.11001100110 * 2^{-3}$$

$$X_2 = 0.11001100110 * 2^{-2}$$

اول حاجه هلاقى ان ال powers مش زى بعض يبقى هاخد ال 3- ده و هخليه 2- يعنى هحرك العلامة ناحيه الشمال مره كمان و هزود صفر

واثناء عملية الجمع مش بكون ملزمه بالشرط بتاع ال Mantissa ان اول digit بعد العلامة يكون 1

يبقى الرقم الاولانى هيبقى كده:

$$X_1 = 0.011001100110 * 2^{-2}$$

طيب نشوف الشرط التانى بقى هلاقى ان عدد ال digits بتاعت الرقم الاولانى زاد علشان ال 0 اللى حطناه ده يبقى كده لازم نزود digit كمان على الرقم التانى بس هنزود من على اليمين علشان مياثرش فى قيمه ال mantissa

$$X_2 = 0.110011001100 * 2^{-2}$$

نجمع بقى ☺

$$X_1 = 0.011001100110 * 2^{-2}$$

$$X_2 = 0.110011001100 * 2^{-2}$$

اول حاجه هننزل ال Power زى ما هوا ونجمع زى العادى

$$X_1 + X_2 = 1.001100110010 * 2^{-2}$$

نخزن بقى الرقم ده زى ما احنا متعودين

الاول نخلى اول رقم بعد العلامة 1 هيبقى كده

$$X_1 + X_2 = 0.1001100110010 * 2^{-1}$$

ناخد بقى اول 11 bit

$$X_1 + X_2 = 0.10011001100 * 2^{-1}$$

هنلاقى ال bit رقم 12 = 1 كده هنعمل rounding يعنى هنجمع واحد على الرقم ال 11 bit اللى خدناه فا الناتج هيبقى كده:

$$X_1 + X_2 = 0.10011001101 * 2^{-1}$$

و بعد كده نجمع الناتج ده مع الرقم التالت

$$X_3 = 0.10101010101 * 2^{-2}$$

هننظبط ال power علشان يبقى زى اللى فوق

$$X_3 = 0.010101010101 * 2^{-1}$$

و نزود الرقم التانى digit من اليمين علشان يبقوا زى بعض

$$X_1 + X_2 = 0.100110011010 * 2^{-1}$$

و نجمع بقى :

$$X_1 + X_2 = 0.100110011010 * 2^{-1}$$

$$X_3 = 0.010101010101 * 2^{-1}$$

$$Sum = 0.111011101111 * 2^{-1}$$

كده عدد ال bits بقى 12 فا هناخد 11 بس و هلاقى ان ال bit رقم 12 = 1 يبقى هعمل rounding و هزود واحد على الرقم و الناتج هيبقى كده

$$Sum = 0.11101111000 * 2^{-1}$$

و كده نكون وصلنا للناتج النهائي ☺

عازين بقى نحوله Decimal علشان نطرحه من ال Exact Solution علشان نطلع ال Error

$$Sum = 0.466796875$$

$$E = \frac{7}{15} - 0.466796875 = -0.00013$$

Error Analysis

We have 2 rules that we will be following for the rest of the term to analyze errors I will first write the 2 definitions then I will explain each one with examples:

We will assume that there are 2 numbers p, p' where p' is the approximated value of p

Definition # 1:

p' Is an approximation to p up to d decimal digits if d is the largest positive integer value that satisfies the following rule:

$$|p - p'| \leq 0.5 * 10^{-d}$$

Definition # 2:

p' Is an approximation to p up to d significant decimal digits if d is the largest positive integer value that satisfies the following rule:

$$\frac{|p - p'|}{p} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

طیب الفرق بین الـ decimal digits بقى ان الـ d هنا بتمثل عدد الـ digits دى

يعنى لو قلنا مثلا

$$X_1 = 2.53243, X_2 = 2.53272$$

الرقمين دول فى كام digit متشابهين فيه ؟

لو عدت عددهم هيطلعوا 4

$$X_1 = 2.53243, X_2 = 2.53272$$

يبقى الـ 4 digits دول بسميهم الـ decimal digits و بقول ان الـ d = 4 علشان عددهم 4

طيب لو افترضنا ان عندنا counter كده الارقام بتتحرك فيه لحد ما تثبت عند رقم معين و كانت قرايته فى مره كده مثلا:

2	.	4	8	2	5
					6

هلاحظ هنا ان اول 4 digits ثابتين على ارقام معينه لكن اخر واحد واقف فى النص كده ولا هوا 5 ولا هوا 6 يعنى ممكن ياخذ اى قيمه اى واحده فيهم او قيمه بينهم فا هنا بقى بيحصل فرق يعنى اول 4 digits دول مفيش شخصين ينفع يختلفوا على قيمتهم لانهم محددين بشكل واضح لكن اخر bit ده ممكن اتنين كل واحد يفرضه قيمه مختلفه فا بالتالى مش دايما هيقرضوا نفس القيمه

طيب لو افترضنا اننا اخترنا شخصين و قلناهم يكتبوا قرايه الـ counter ده و كان الرقيمن الى كتبوهم كده مثلا :

$$X_1 = 2.48251, X_2 = 2.48255$$

لو انا هطبق اول definition علشان اعرف الـ decimal digits عددهم كام هلاقى انهم متشابهين فى 5 ارقام اللى هما:

$$X_1 = 2.48251, X_2 = 2.48255$$

طيب لو طبقت تانى definition هنا بقى هتختلف لان الـ significant decimal digits عبارته عن عدد الـ digits اللى انا متأكده من ان قيمتهم بتساوى الرقم الاصلى اللى هى قرايه الـ counter اصلا كده بيبقى هلاقى ان عدد الـ digits اللى متأكده ان قيمتهم صح هما 4 بس اللى هما:

$$X_1 = 2.48251, X_2 = 2.48255$$

لان اخر واحد انا اصلا مش متأكده من قيمته فا كل واحد من الاتنين اللى كتبوا القرايه دى كتبها من وجهة نظره هوا ☺ ودول بقى بسميهم الـ significant decimal digits لان انا بكون متأكده ان قيمتهم كده صح.

طيب ايه هوا بقى التطبيق بتاع الكلام ده فى الكمبيوتر؟

عادتاً يحصل نسبة error بين القيمة الـ exact و القيمة الـ approximated اللى الكمبيوتر بيطلعها ده احنا عارفينه طيب ايه الجديد؟
 اللى انا عايزه اعرفه دلوقتى ان لو انا عندي مثلا كمبيوتر بمواصفات معينة و دخلتله قيمه معينه طبعا هوا هياخذها و يعملها approximation او مثلا القيمة دى ناتج عمليه حسابيه برضوه هيعملها approximation يعنى مش هتكون مساويه بالظبط للناتج او القيمة الـ exact اللى انا عايزه اعرفه بقى هوا على اسوأ الاحوال ايه هوا عدد الـ digits المتشابهة بين القيمة الـ exact اللى عندي و القيمة الـ approximated اللى عند الكمبيوتر
 اللى هوا الـ d وطبعا بحسبها على حسب الـ DEFINITIONS اللى قلنا عليها فى الاول على حسب ما يطلب فى المسأله بقى
 يعنى لو طلب الـ d وقال انها الـ decimal digits يبقى هستخدم اول definition
 اما لو قال ان الـ d دى عبارة عن الـ significant decimal digits فا هستخدم الثانى
 طيب هنقول مثال و هنمشيه خطوه خطوه:

Ex:

If we have a 32 bit computer, find the number of significant decimal digits (d) in the worst case?

طيب اول خطوه هعملها ان انا اختار القانون اللى انا همشى عليه و فى الحاله دى هختار القانون الثانى على حسب المطلوب:

$$\frac{|p - p'|}{p} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

طيب ايه هما p & p' ؟

دول رقمين عاديين جدا هعملهم normalization علشان اعوض بيهم فى القانون ده

$$p = q * 2^n, p' = q' * 2^n$$

ده احنا عارفينه من قبل كده برضوه, طيب نعوض فى الجزء الاولانى من القانون اللى فوق ده هلاقيه يطلع كده:

$$\frac{|q * 2^n - q' * 2^n|}{q * 2^n} = \frac{q - q'}{q}$$

$$\frac{q - q'}{q} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

لحد كده مفيش مشاكل مجرد تعويض عادى

طيب السؤال اصلا كان ايه عدد الـ significant decimal digits فى اسوأ الاحوال

طیب ایه هی اسواً الاحوال اصلا ؟

اسواً الاحوال ان انا لما اجی اخزن q فی الكمبيوتر ده هوا يحولها ل q^* قيمتها قليله اوى عن قيمه ال q الاصلیه عندی لانه كده هيعمل فرق فی القيمه كبير

طیب نشوف ایه احوال الكمبيوتر ده ؟

هوا قال انه 32 bit يعنى بيخزن ال q^* فی 24 bit فى منهم واحد لل sign يبقى اسواً حاجه ممكن تحصل ان يكون ال q بتاعتى ال exact اول 22 bit فيها اصلا اصفار و من اول ال bit رقم 23 كلها 1 لحد مالا نهایه

يعنى بالظبط عند ال bit اللی انا مش هعرف اخزنه فی الكمبيوتر ده كله 0 و الباقي اللی هينفضله ده كله 1 طیب يبقى كده اكيد حصل مشكله كبيره القيمه كده مبقتش مطبوطه خالص طیب سؤالین بسرعه كده

انا لیه قلت اول 22 bit مع انه بيخزنه فی 23 ؟

لان اول bit بعد العلامه ده لازم يكون واحد علشان اقبل ال mantissa دى اصلا

طیب و لیه مقلناش هنععمل rounding بما ان ال bit اللی انا هقف عنده اللی بعديه بيساوى 1 ؟

لان انا هفترض اسواً الظروف و هی ان انا بعمل chopping مش rounding و عموماً لما نعملها بال chopping هكتبها تانى بس بال rounding و هنشوف اد ایه الفرق بسيط جدا بينهم طیب انا كده توصلت لقيمه q^* , q الى هما:

$$q = 0.1000 \dots 000 \dots 111 \dots$$

عدد ال $0 = 22$ و بعد كده ال 1 الى مالا نهایه

$$q^* = 0.1000 \dots 000$$

هنا عدد ال $0 = 22$ و الباقي كده رميته لان الكمبيوتر بتاعى ده امكانياته ميقدرش يشيل اكثر من كده

طیب نبدأ نعوض بالارقام دى فی القانون اللی سبناه فوق ده بحيث نطلع قيمه d اللی هيا احنا عايزنها اصلا ☺

$$q = 0.5 + 2^{-24} + 2^{-25} + \dots$$

$$= \frac{2^{-24}}{1 - 2^{-1}} + 0.5 = 0.5 + 2^{-23}$$

طبعا دى طلعتها بال Geometric Series

$$q' = 0.5$$

نعوض فى القانون

$$\frac{0.5 + 2^{-23} - 0.5}{0.5 + 2^{-23}} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$\frac{2^{-23}}{2^{-1} + 2^{-23}} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

هنضرب فى اثنين

$$\frac{2^{-22}}{1 + 2^{-22}} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

هنا اقدر اقول ان قيمه 2^{-22} دى صغيره اوى اوى فا لما اجمعها مع الواحد هيطلع واحد تقريبا

$$2^{-22} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

هنضرب فى 2 تانى

$$2^{-21} \leq 10^{-d}$$

هنقلب الطرفين مما هيؤدى ان الاشارات هتتغير و العلامه هتتغير

$$2^{21} > 10^d$$

ناخد Log الطرفين

$$21 \log 2 > d$$

نحسب القيمه دى على ال calculator هتطلع:

$$d < 6.3$$

بما اننا قلنا فى ال definition ان ال d دى عدد موجب صحيح يبقى هاخد الجزء الصحيح بس فا هيبقى:

$$d = 6$$

و الكلام ده معناه ان فى اسوأ الاحوال هيبقى فى 6 significant decimal digits بين الرقم ال exact وال approximated انا متأكده من ان قيمه ال 6 دول فعلا صح.

ولو افترضنا ان احنا بدأنا من الاول و عملنا rounding فا كان اكبر error هيحصل لو كان ال q اقاصلا اول 24 bit فيها كلهم 0 و الباقى لحد مالا نهاية كله 1 فا كنت هاخذ اول 23 bit و اجى اعمل rounding فا هبص على ال bit رقم 24 هلاقية 0 فا هنفضله و اكمل مع ان اللى انا سبته ده

من بعد ال 0 كله 1 فاده كده هتبقى ال case اللى هيحصل فيها اكبر error لو انا بستخدم ال rounding

هكتب الحسابات تانى على هذا الاساس بقى ☺

$$q = 0.1000 \dots 00001111 \dots$$

على افتراض ان عدد ال $0 = 24$ و ال 1 الى مالا نهاية

$$q' = 0.10000000 \dots .000$$

و هنا عدددهم $= 23$

$$q = 0.5 + 2^{-25} + 2^{-26} + \dots ..$$

$$= \frac{2^{-25}}{1 - 2^{-1}} + 0.5 = 0.5 + 2^{-24}$$

$$\frac{0.5 + 2^{-24} - 0.5}{0.5 + 2^{-24}} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$\frac{2^{-23}}{1 - 2^{-23}} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$2^{-23} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$2^{-22} \leq 10^{-d}$$

$$2^{22} > 10^d$$

$$22 \log 2 > d$$

$$d < 6.6$$

$$d = 6$$

طبعا لاحظنا انه مفيش فرق فى الاخر او مش كبير اوى يعنى

Convert to Binary:

$$R = \frac{1}{7}$$

$$R = \frac{1}{3}$$

$$R = \frac{1}{7} = 0.1429$$

$$2R = 0.2858$$

$$d_1 = 0, f_1 = 0.2858 \rightarrow 2f_1 = 0.5716$$

$$d_2 = 0, f_2 = 0.5716 \rightarrow 2f_2 = 1.1432$$

$$d_3 = 1, f_3 = 0.1432 \rightarrow 2f_3 = 0.2864$$

$$d_4 = 0, f_4 = 0.2864 \rightarrow 2f_4 = 0.5728$$

$$d_5 = 0, f_5 = 0.5728 \rightarrow 2f_5 = 1.1456$$

$$d_6 = 1$$

$$\frac{1}{7} = 0.001001001 \dots$$

$$R = \frac{1}{3} = 0.3333$$

$$2R = 0.6666$$

$$d_1 = 0, f_1 = 0.6666 \rightarrow 2f_1 = 1.3332$$

$$d_2 = 1, f_2 = 0.3332 \rightarrow 2f_2 = 0.6664$$

$$d_3 = 0, f_3 = 0.6664 \rightarrow 2f_3 = 1.3328$$

$$d_4 = 1, f_4 = 0.3328$$

$$\frac{1}{3} = 0.010101 \dots$$

3- Loss of Significance:

الموضوع ده باختصار كده ان الكمبيوتر لما بيحس يطرح رقمين بيعمل نسبة error عاليه و النسبه دي بتعتمد على هوا اخذ كام significant decimal digit من الرقمين اللى بيترحمهم من بعض

هنشوف مثال كده علشان نفهم اكتر:

Ex:

لو قلنا مثلا ان عندنا رقمين كده:

$$P = 3.1415926536$$

$$Q = 3.1415957341$$

و ناتج الطرح ال exact بتاعهم كان كده:

$$P - Q = 0.0000030805$$

لو انا بقى دخلت المسأله دي لكمبيوتر و طلبت منه يحلها و فى كل مره هخليه يزود عدد ال significant digits اللى بياخذها و هرمزلها فى الجدول اللى جاى ده ب k اللى هى اول حاجه خالص و بعدين هكتب قيمه P' & Q' اللى الكمبيوتر هياخداهم على حسب ال K و الى بعديهم ناتج الطرح الى هيطلعه و بعديهما هطبق القانون بتاع ال relative error علشان فى كل مره اشوف الفرق بين الناتج ال exact والناتج اللى هوا هيطلعه و اخيرا هشوف عدد ال d اللى هوا متشابه فيه مع الناتج الاصلى

الجدول ده هيووضح الكلام اللى فوق ده:

K	P'	Q'	$P' - Q'$	$\frac{ (P - Q) - (P' - Q') }{ P - Q }$	# Valid Significant Digits
6	$0.314159 * 10$	$0.314160 * 10$	$-0.1 * 10^{-4}$	2.2462263	Invalid approximation
7	$0.3141593 * 10$	$0.3141596 * 10$	$-0.3 * 10^{-5}$	0.0261321	1
8	$0.31415926 * 10$	$0.31415957 * 10$	$-0.3 * 10^{-5}$		1
9	$0.314159265 * 10$	$0.3141595734 * 10$	$-0.308 * 10^{-5}$		3
10					
11	$0.31415926536 * 10$	$0.31415957341 * 10$	$-0.30805 * 10^{-5}$		11

طيب ايه اللي لاحظناه؟

ان كل ما يزود عدد ال significant digits نسبه ال error بتقل .

يبقى معنى كده ان عمليه الطرح بتعمل مشكله بيقى لو فى طريقه اقدر بيها استغنى عن عمليه الطرح فى الحسابات على الكمبيوتر و احط مكانها اى عمليه تانيه يكون افضل

هنشوف امثله بقى:

Ex:

Let $f(x) = x [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}]$ and $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$, using 6- significant digits and rounding find: $f(500)$ & $g(500)$?

هنا معرفلى 2 functions عايزنى اعوض بقيمه معينه فيهم الى هى 500 الفرق بس انه عايزنى اخذ 6 digits بس من الناتج الطوييل اللي هيطلع على ال calculator و اعمله rounding يعنى عمليه تقريب ☺

فا هيطلع اول واحده كده:

$$f(500) = 500[\sqrt{501} - \sqrt{500}]$$

$$= 500 [22.3830 - 22.3607]$$

$$= 11.1500$$

$$g(500) = \frac{500}{\sqrt{501} + \sqrt{500}} = 11.1748$$

طيب ملحوظة بسيطه انا لو اخدت ال conjugate او المرافق ل $f(x)$ هلاقيه كده:

$$f(x) = x [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] * \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = g(x)$$

طيب اومال ليه لما عوضنا طلع الناتج مختلف؟

لان الاولانيه فيها عمليه طرح فا حصل نسبه ERROR لكن فى الثانيه انا استغنيت عن عمليه الطرح بحاجه تانيه فا بالتالى طلع ناتج مقارب للحل ال exact .

طيب مثال كمان و خلاص ☺

Ex:

If $f(x) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ find $f(3.14)$? 5 bit and rounding

اول حاجه ضبطوا ال calculator على انها تبقى ☺ radian

نیجی نشوف بقى لو عملناها عادى هلاقى ان $\cos(3.14)$ هلاقيها بتساوى تقريبا -1 - فا لما اعوض عنها فى ال f هتطلع 0 !!!!

$$f(3.14) = \sqrt{\frac{1-1}{2}} = \frac{0}{2} = 0$$

طيب الكلام ده مينفعش انا عايزه اتخلص من موضوع السالب ده طيب هنعمل ايه؟

هنستعين بالمتطابقات بتاعت زمان دى

كان فى حاجه بتقول ان:

$$\begin{aligned}\cos X &= \cos\left(\frac{X}{2} + \frac{X}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{X}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{X}{2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2}} \\ &= \cos \frac{x}{2} = \cos\left(\frac{3.14}{2}\right) \\ &= 0.7963 * 10^{-3}\end{aligned}$$

بس كده ☺

4- Truncation Error:

آخر نوع من انواع ال Errors اللى بتحصل فى الكمبيوتر هوا ال TE ده طيب بيحصل ليه؟
لو انا عندي مثلا مسأله معينه بتتحل بال infinite series زي مثلا Taylor or McLaren
دى بتبقى عبارته عن terms ال infinite series بتاعتها عبارته عن polynomials
حاجه زي كده مثلا:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

دى الى مالا نهايه اهو

طيب لو انا افترضت ان انا عايزه اجيب قيمة $e^{0.1}$

فا دى لما اعوض فوق هتبقى كده:

$$e^{0.1} = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!} + \dots$$

و لحد مالا نهايه بقى

طيب ماهو انا طبعا مقدرش احسبها لحد مالا نهايه فا هعمل ايه؟

هاخد شويه حدود كده فى الاول 10 او 100 حتى و احسبهم و الباقي ده بقى هنفصله
كده مثلا:

$$e^{0.1} \approx 1 + 0.1 \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.1)^4}{4!} = 1.105$$

طيب والباقي ده اللى انا نفصلته ايه نظامه؟

الباقي ده عبارته عن ال Truncation error

طيب هحسبه ازاي؟

هقول اولاً:

$$T_E = \frac{(0.1)^5}{5!} + \frac{(0.1)^6}{6!} + \frac{(0.1)^7}{7!} + \dots$$

الى مالا نهايه بقى

دلوقتى بقى هاخذ اول term عامل مشترك

$$T_E = \frac{(0.1)^5}{5!} \left[1 + \frac{0.1}{6} + \frac{(0.1)^2}{6 * 7} + \frac{(0.1)^3}{6 * 7 * 8} + \dots \right]$$

طیب لو انا قللت المقام هیحصل ایہ؟

الاجابه الطبیعیہ ان القیمہ ہتیزد

فا بالتالی اقدر اقول:

$$\frac{(0.1)^5}{5!} \left[1 + \frac{0.1}{6} + \frac{(0.1)^2}{6 * 7} + \frac{(0.1)^3}{6 * 7 * 8} + \dots \right] \leq \frac{(0.1)^5}{5!} \left[1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!} + \dots \right]$$

واللی علی الیمین دہ اصلا ایہ؟

ایوہ بالظبط دہ بیقی القیمہ اللی انا حسبتہا من شویہ فوق دی بتاعت $e^{0.1}$ طیب نعوض بالقیمہ اللی طلعتها

$$\begin{aligned} T_E &\approx \frac{(0.1)^5}{5!} (e^{0.1}) \\ &= \frac{(0.1)^5}{5!} (1.105) \approx 10^{-7} \end{aligned}$$

ویکدہ نکون طلعتها ال Truncation error اللی حصل نتیجہ انا مقدرناش نحسب قیمہ ال infinite series کلہا و خدنا شویہ terms کدہ و نفصنا للباقی.

وطبعا القیمہ دی تقریبیہ یعنی مش exact ☺

وکدہ نکون خلصنا کل ال sources of errors

Ex 1:

A 40 bit computer, 32 bit mantissa and 8 bit exponent, find number of significant decimal digit in the worst case, the computer uses rounding up?

$$p = 0.1000 \dots 000|0111111 \dots$$

$$= 0.5 + 2^{-33} + 2^{-34} + \dots$$

$$= 0.5 + \frac{2^{-33}}{1 - 2^{-1}} = 0.5 + 2^{-32}$$

$$p' = 0.1000 \dots 000 = 0.5$$

$$\frac{q - q'}{q} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$\frac{0.5 + 2^{-32} - 0.5}{0.5 + 2^{-32}} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$\frac{2^{-31}}{1 + 2^{-31}} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$2^{-31} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$2^{-30} \leq 10^{-d}$$

$$2^{30} > 10^d$$

$$30 \log 2 > d$$

$$d < 9.03$$

$$d = 9$$

Ex 2:

If $X = 3.141592$ and $X' = 3.14$ find the number of significant decimal digits between the two numbers?

$$\frac{X - X'}{X} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$\frac{3.141592 - 3.14}{3.141592} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$0.000507 \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$0.5 * 10^{-3} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$d = 3$$

Ex:

If $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ and the equivalent function $P(x) = 1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24}$ is mathematically equal to (x) , find $f(0.01)$ and $P(0.01)$ and compare between the two results?

Known that the Exact value is: 0.5016708416805

$$f(0.01) = \frac{e^{0.01} - 1 - 0.01}{(0.01)^2} = 0.5$$

$$P(0.01) = 1 + \frac{(0.01)}{6} + \frac{(0.01)^2}{24} = 0.501671$$

We will find that the function $f(x)$ has a larger error than $P(x)$ because of the subtraction operation.

Ex:

If the exact value of the integration $\int_0^{0.5} e^{2x} dx = 0.544987109184$ and if the approximated value of e^{2x} is represented by the finite series

$$p(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$$

Calculate the error in the approximated value of the integration?

$$\int_0^{0.4} P(x) dx = \left| \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{3! * 7} x^7 + \frac{1}{4! * 9} x^9 \right) \right|_0^{0.5}$$

$$= 0.544986720818$$

$$\frac{p - p^*}{p} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$1.406 * 10^{-6} \leq 10^{-d}$$

$$1.406 * 10^6 > 10^d$$

$$d < 6.1$$

$$d = 6$$

Q#1:

If $X = 2.71828182$ and $X' = 2.7182$ find the exact error and relative error and the number of significant decimal digits?

Q#2:

To solve a quadratic equation we usually use the exact form:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

But because of the loss of significance we approximated this value in the form:

$$X' = -\frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Solve the following equation in both exact and approximated forms and find the error between the two solutions:

$$x^2 - 1000.001x + 1 = 0$$

(1)

$$E_x = X - X'$$

$$= 2.71828182 - 2.7182 = 8.182 * 10^{-5}$$

$$R_x = \frac{|X - X'|}{X}$$

$$= \frac{8.182 * 10^{-5}}{2.71828182} = 3.1 * 10^{-5}$$

$$\frac{|X - X'|}{X} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$3.1 * 10^{-5} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$6.2 * 10^{-5} \leq 10^{-d}$$

$$-4.2076 \leq -d$$

$$d \leq 4.2076$$

$$d = 4$$

(2)

$$x^2 - 1000.001x + 1 = 0$$

if $b < 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

if $b > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$a = 1, b = -1000.001, c = 1$$

so $b < 0$

$$x_1 = \frac{1000.001 + \sqrt{(1000.001)^2 - 4}}{2} = 0.001$$

$$x_2 = -\frac{2}{1000.001 - \sqrt{(1000.001)^2 - 4}} = -1000$$

Ex:

If $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ find $f(0.01)$ up to 6 decimal digits?

هنا هوا عايز احسب قيمه ال function دى عند 0.01 بس المهم ان القيمه تبقى فيها 6 ارقام
لو حسبناها على ال Calculator هتطلع الناتج ده:

$$f(0.01) = \frac{e^{0.01} - 1 - 0.01}{(0.01)^2} = \frac{1.010050 - 1 - 0.01}{0.0001} = 0.5$$

لاحظنا هنا انه طلع رقم واحد بس و ده طبعا نتيجة عمليه الطرح اللى بتعمل نسبه error

طيب الحل دلوقتى اننا نحاول نتخلص من موضوع الطرح اللى فى ال function ده

يعنى هنحاول نجيب formula ثانيه لل function دى

احنا كنا قلنا قبل كده ان قيمه e^x المفروض انها عبارة عن infinite series اللى هى McLaren
كان شكلها كده:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

طيب المشكله دلوقتى انها ماشيه لحد مالا نهاية و انا مش هقدر احسبها لحد مالا نهاية لازم
هعمل truncation عند term معين

طيب و الباقى ده اللى هوا نسبة ال error اللى من اول ما وقفت لحد مالا نهاية هحسبه ازاي؟
فى حاجه زى general term كده ده بيطلع نسبة ال error او مجموع ال terms اللى انا سبتها
اللى هوا:

$$\frac{e^z}{(n+1)!} * (x)^{n+1}$$

طيب ايه هى ال z وال x دول ؟

ال z هى قيمه بين ال 0 و ال x

و ال x هى اللى احنا عايزين نحسب ال function عندها اللى هى هنا = 0.01 و عادتنا ال z
بتاخذ اعلى قيمه ليها اللى هى x يعنى هنفترض ان ال z كمان = 0.01

طيب لو زودنا ال term ده فى ال series اللى فوق دى هيبقى شكلها كده:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^z}{(n+1)!} * (x)^{n+1}$$

دلوقتى بقى هحاول نوصلها للشكل بتاع ال function اللى فى السؤال اصلا

هنتقل ال 1 وال x نخطهم الناحيه التانيه فا هتبقى كده:

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^z}{(n+1)!} * (x)^{n+1}$$

ناقص كده نقسم على x^2 و معنى انى اقسام عليها يعنى هنقص من كل ال Powers فى ال
terms دى 2

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} \dots + \frac{e^z}{(n+1)!} * (x)^{n-1}$$

طيب كده تمام وصلنا لشكل جديد لل function مفيش فيه طرح اهو كله جمع ☺

الخطوة الثانية بقی نشوف المفروض نحسب كام term علشان الناتج يطلع فيه 6 decimal digits
طيب دى هنعملها ازاى ؟
بالقانون ده :

$$\frac{|p - p'|}{p} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

طيب هوا موفر عليا كثير هوا قالى على نسبة ال error فى ال general term و بما انه طالب
6 decimal digits فا ده معناه ان $d = 6$ يبقى انا مش ناقص غير اجيب قيمه ال n

$$\frac{e^z}{(n+1)!} * (x)^{n-1} \leq 0.5 * 10^{-6}$$

هعوض عن ال x & z

$$\frac{e^{0.01}}{(n+1)!} * (0.01)^{n-1} \leq 0.5 * 10^{-6}$$

الشكل ده كده ملهوش قانون يحله فا هعمل Try and Error يعنى هجرب قيم لل n لحد ما الاقى
حاجه تحققلى المعادله دى:

المفروض ان اول n تحقق المعادله هى 4

وده معناه ان انا هاخذ 4 terms بس

خلى بالكوا ان انا هاخداهم على اساس ال series الاصلية اللى هى دى:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

طيب اول 4 يعنى لحد x^4 اللى هى لما قسمناها على x^2 بقت x^2 يعنى لما اروح للشكل
الجديد اللى طلعهاه هعوض لحد x^2 بس.

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} \dots + \frac{e^z}{(n+1)!} * (x)^{n-1}$$

نعوض بقی:

$$f(0.01) = \frac{1}{2} + \frac{0.01}{6} + \frac{0.0001}{24} = 0.50167$$

و ده فعلا 6 decimal digit زي ما كنا عايزين ☺

Propagation of Error

دلوقتي احنا اتفقنا قبل كده ان الكمبيوتر لما بيحس يخرن اى رقم بيخرنه بنسبه error معينه تمام كده؟

طيب لما يكون فى عندي رقمين و عايزه اجمعهم مثلا او اضربهم او اعمل عليهم اى عمليه حسابيه, طبعا بما ان اصلا الرقمين فيهم نسبه error فالتبعية ان انا لما ادخلهم فى اى عمليه حسابيه هيبقى فى نسبه error برضو طيب انا عايزه اعرف بقى ال error ده بيزيد ولا بيقبل ولا بيفضل زي ما هوا ولا بيحصله ايه نتيجة لاي Operation ممكن يدخل فيها الرقم ده طيب نشوف مثال بسيط على رقمين مثلا p و q بعد ما نخزنهم فى الكمبيوتر هيبقى شكلهم كده:

$$p = p' + \epsilon_p$$

$$q = q' + \epsilon_q$$

هنا ال ϵ بترمز لل Error

طيب لو عايزه اجمعهم بقى؟

عادي جدا زي اى عمليه جمع عاديه هجمع جزء ال mantissa مع بعضه و جزء ال error مع بعضه

$$p + q = (p' + q') + (\epsilon_p + \epsilon_q)$$

ده كده معناه ان قيمه ال error فى عمليه الجمع هى عبارته عن حاصل جمع الاجزاء بتاعت ال error اللى فى الارقام اللى بجمعها مع بعضها.

طيب نضربهم كده علشان نشوف ال error بتاع عمليه الضرب هيبقى شكله عامل ازاي؟

$$p \cdot q = (p' + \epsilon_p) \cdot (q' + \epsilon_q)$$

$$= p'q' + \epsilon_p q' + p' \epsilon_q + \epsilon_p \epsilon_q$$

بعد كده هطلع ال relative error

$$R_E = \frac{pq - p'q'}{pq}$$

$$= \frac{p'q' + \epsilon_p q' + p' \epsilon_q + \epsilon_p \epsilon_q - p'q'}{pq}$$

$$= \frac{\epsilon_p q' + p' \epsilon_q + \epsilon_p \epsilon_q}{pq}$$

$$= \frac{\epsilon_p q'}{pq} + \frac{p' \epsilon_q}{pq} + \frac{\epsilon_p \epsilon_q}{pq}$$

المفروض بقى ان مثلا ال p' دى عبارة عن قيمه تقريبيه ل p و هكذا بالنسبه لل q فا لما اقسمهم على بعض يدونى تقريبا واحد يعنى هيبقى الناتج كده:

$$\approx \frac{\epsilon_p}{p} + \frac{\epsilon_q}{q} + \frac{\epsilon_p \epsilon_q}{pq}$$

طيب نسبه ال error الى هى $\epsilon_p \epsilon_q$ دى اصلا صغيره اوى لدرجه ممكن اعتبر انها تقريبا بتساوى الصفر وده يؤدى الى:

$$\approx \frac{\epsilon_p}{p} + \frac{\epsilon_q}{q}$$

و هى دى نسبه ال error الى بنتج من عمليه الضرب وممكن نعبر عنها على انها ال relative error بتاع $P + Q$ ال relative error بتاع ال q

طيب كده ده يعتبر شويه توضيح بسيط يعنى الغرض منه ان نسبه ال error مش بتفضل ثابتة بعد ما استخدم الارقام دى فى اى operation فى الكمبيوتر و الغرض من دراسه الموضوع ده دلوقتى ان انا اعرف لو عندى system مكون من عمليات حسابيه معينه و قلت للكمبيوتر يحسبه او استخدمته مثلا اثناء عمليات كثير يعنى فى حاجه معينه

فى الحاله دى هبقى عايزه اعرف هل ال system ده لما العمليات الحسابيه تزيد ايه اللى هيحصل لل error؟؟!

الاجابه على السؤال ده بسيطه اوى

اولا انا عندى نوعين من ال systems فى حاجه اسمها stable system و حاجه تانيه اسمها unstable system الفرق ايه بقى بينهم؟

مثلا لو جيت شويه ارقام و قلت هفضل اجمعهم على بعض لحد مالا نهايه و جيت شوفت ال error فى ال system ده عند ال infinity دى لو لقيتها 0 او constant كده ال stable system و ده معناه ان نسبه ال error بتقل او بتفضل ثابتة عند constant معين و الحاله دى احسن طبعا

لكن لو لقيت ان قيمه ال error بقت infinity كده هيبقى اسمه unstable system و ده طبعا مش حاجه كويسه لانه هيطلع error كبير اوى يبقى مش من المستحسن انى استخدمه فى حسابات انا بعملها.

طيب بما ان الكلام ده عظيم جدا ☺ فا نشوف مثال احسن بقى :

Ex:

Consider the sequence $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\} = \{X_n\} = \{\frac{1}{3^n}\}$:

- i) Show that the following three methods can be used with infinite precision rational arithmetic to recursively generate the terms of above sequence:

(a) $r_0 = 1, r_n = \frac{1}{3} r_{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$

(b) $p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{3}, p_n = \frac{4}{3} p_{n-1} - \frac{1}{3} p_{n-2}, n = 2, 3, \dots$

(c) $q_0 = 1, q_1 = \frac{1}{3}, q_n = \frac{10}{3} q_{n-1} - q_{n-2}, n = 2, 3, \dots$

- ii) Investigate the error propagation when the initial error as follows:

(a) $r_0 = 1 - \epsilon$

(b) $p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{3} - \theta$

(c) $q_0 = 1, q_1 = \frac{1}{3} - \theta$

طيب عن ماذا يتحدث بقى !!؟

هوا هنا بيقول انا عندى sequence اللى هى مكتوبه فوق دى و ال rule بتاعتها هى ال $\frac{1}{3^n}$

طيب لحد كده جميل, و بعدين بقى هوا طالب ايه ؟

الاول بس عايزه اقول معلومه صغونه كده, زمان كده ايام 1 math ☺ كان عندنا طريقتين للتعبير عن ال sequence واحده explicit و التانيه recursive

ال explicit كنا بنعبر عن ال sequence اكنها rule و بعوض فيها على طول و اقدر اطلع اى term فى ال sequence دى بمجرد انى اكون عارفه ال rule بتاعتها زى مثلا ما قلنا هنا $\frac{1}{3^n}$ لو انا عايزه ال term رقم 10 مثلا هعوض مكان ال n ب 10 و بالتالى هيطلع قيمته على طول

ال recursive بقى كانت بتوصف ال sequence بدلاله initial term او اكثر يعنى مثلا يقولى اول term قيمته كذا وال sequence دى ال rule بتاعتها بتقول مثلا ان كل term عبارة عن ال term اللى قبله مضروب فى 3 مثلا فا لو عايزه ال term رقم 10 لازم اجيب رقم 9 و رقم 8 و هكذا لحد ما اوصل لل initial term و اعوض بقيمته و ارجع اعوض فى كل اللى بعده لحد ما اوصل لرقم 10

طيب كده اتفقنا ان ال rule بتاعت ال sequence اللى فى السؤال عبارة عن explicit representation

الجزء الاول من السؤال قالى على شويه recursive rules و قالى اثبت ان ال rules دى بتساوى ال explicit اللى فى السؤال يعنى تكون فعلا بتطلع نفس ال sequence لو عوضت فيها بس هنا بقى مش هينفع اثبتها بمجرد التعويض لازم اثبتها بطريقه theoretical علشان الناس تصدقنى يعنى ☺

طيب ايه الحاجه المميزه فى الطلب ده؟

انه قال انه هيسخدم infinite precision يعنى معندوش error ممكن يحصل خالص كله هيطلع exact بالطبط

طيب نحل ده الاول و بعدين نشوف المطلوب التانى

هوا نفس اللى هعمل على رقم a هعمله على رقم b و c دى ☺ homework

خلينا فى اللى عايزين نحله دلوقتى:

نشوف كده رقم a بتقول ايه:

$$r_0 = 1, r_n = \frac{1}{3}r_{n-1}$$

ده كده recursive و انا عايزه احوله explicit علشان اثبت انه زى اللى فى المسأله فى الاول

اول خطوه هجيب حاجه اسمها ال difference equation

دى بجيبها بان انا باخد ال recursive relation و اعوض مكان كل r_n بـ Z^n

طيب نعوض كده هتبقى:

$$Z^n = \frac{1}{3}Z^{n-1}$$

وهى دى ال difference equation

هحط كل حاجه على ناحيه واحده:

$$Z^n - \frac{1}{3}Z^{n-1} = 0$$

هاخد Z^{n-1} عامل مشترك

$$Z^{n-1} \left(Z - \frac{1}{3} \right) = 0$$

$$Z = \frac{1}{3}$$

النتيجة اللي انا وصلت لها دي هقدر اقول منها ان:

$$r_n = A(Z)^n$$

مع اعتبار ان A ده اى constant يعنى

وبالتعويض هيبقى:

$$r_n = A\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

دلوقتى بقى انا عايزه اعرف قيمه ال A ده فا هعوض بال initial condition اللي هوا قالى عليه

$$r_0 = 1$$

$$r_0 = A\left(\frac{1}{3}\right)^0 = A$$

$$A = 1$$

يعنى معنى كده ان النتيجة اللي وصلت لها هي:

$$r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

و دي فعلا نفس ال explicit formula اللي فى السؤال بيبقى كده ال recursive representation دي بتطلع نفس ال sequence اللي فى السؤال.

نجرب نفس الموضوع على رقم b

$$p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{3}, p_n = \frac{4}{3}p_{n-1} - \frac{1}{3}p_{n-2}$$

نفس الكلام هجيب ال difference equation

$$Z^n = \frac{4}{3}Z^{n-1} - \frac{1}{3}Z^{n-2}$$

$$Z^n - \frac{4}{3}Z^{n-1} + \frac{1}{3}Z^{n-2} = 0$$

$$Z^{n-2} \left(Z^2 - \frac{4}{3}Z + \frac{1}{3} \right) = 0$$

$$\left(Z - \frac{1}{3} \right) (Z - 1) = 0$$

$$Z = \frac{1}{3}, 1$$

هنا لان طلع عندى 2 roots فا هنزود constant كمان فى ال relation

$$p_n = A(Z)^n + B(Z)^n$$

$$p_n = A\left(\frac{1}{3}\right)^n + B(1)^n$$

هنا برضو لازم اطلع قيم ال A & B و علشان اعمل كده لازم يكون عندى معادلتين يعنى لازم يكون عندى 2 initial values و هوا فعلا قالى عليهم فى السؤال

$$p_0 = 1$$

$$p_0 = A\left(\frac{1}{3}\right)^0 + B(1)^0 = A + B$$

$$A + B = 1$$

دى اول معادله

نعوض بقى بال condition التانى

$$P_1 = \frac{1}{3}$$

$$P_1 = A\left(\frac{1}{3}\right) + B(1)$$

$$\frac{1}{3}A + B = \frac{1}{3}$$

هنطرح المعادلتين من بعض:

$$\frac{2}{3}A = \frac{2}{3}$$

$$A = 1$$

$$B = 0$$

كده انا طلعت القيم اعوض بيها بقى:

$$p_n = \frac{1}{3^n}$$

و ده كده فعلا صح زى ما انا عايزاه ☺

نشوف بقى الجزء الثانى من السؤال كان عايز ايه ؟

هوا هنا بيقولى انه عايزنى اشوف ال error propagation لما هيحصل error بنسبه معينه
هوا قالى عليها

يعنى انا هشوف نسبه ال error ده ايه لما يـ tends to infinity هل هوا هيبقى stable ولا لا
هجرى كده على الـ 3 حالات اللى عندى علشان اعرف مين فيهم نسبه ال error فيه اقل و
بالتالى يكون احسن واحد ممكن استخدمه
اول واحده هوا قال ان:

$$r_0 = 1 - \epsilon$$

يعنى فى error فى القيمه بتاعت ال initial condition
طيب انا اصلا فى الاول استنتجت حاجه مهمه اوى اللى هى كانت بتقول:

$$r_n = A \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

لو انا عايزه اعرف قيمه ال A هعوض فى ال initial condition ده

$$r_0 = A \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 - \epsilon$$

$$A = 1 - \epsilon$$

$$r_n = \frac{1 - \epsilon}{3^n}$$

دى كده تعتبر approximated value و عايزه بقى اطلع ال absolute error بتاعتها

$$\text{Error} = \frac{1}{3^n} - \frac{1 - \epsilon}{3^n}$$

$$= \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{\epsilon}{3^n}$$

$$= \frac{\epsilon}{3^n}$$

انا كده طلعت ال error هشوف بقى قيمته عند مالا نهايه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{3^n}$$

هلاقى ان ال Limit دى هتساوى zero و كده بيقى ال system ده stable

طیب نشوف اللى بعدیها كده

$$p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{3} - \theta$$

$$p_n = A \left(\frac{1}{3}\right)^n + B(1)^n$$

نعوض بال initial conditions و نطلع قيم ال A & B

$$p_0 = A + B = 1$$

$$p_1 = \frac{1}{3}A + B = \frac{1}{3} - \theta$$

نطرحهم من بعض بقى

$$\frac{2}{3}A = \frac{2}{3} + \theta$$

$$A = 1 + \frac{3}{2}\theta$$

$$B = -\frac{3}{2}\theta$$

نعوض بقى

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{3}{2}\theta\right) \frac{1}{3^n} - \frac{3}{2}\theta(1)^n \\ &= \frac{1}{3^n} + \frac{3}{2}\theta \left(\frac{1}{3^n} - 1^n\right) \end{aligned}$$

نطلع ال Error

$$\begin{aligned} \text{Error} &= \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{3}{2}\theta \left(\frac{1}{3^n} - 1^n\right) \\ &= -\frac{3}{2}\theta \left(\frac{1}{3^n} - 1^n\right) \end{aligned}$$

بس كده نجيب ال limit بقى

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{3}{2}\theta \left(\frac{1}{3^n} - 1^n\right) \\ = -\frac{3}{2}\theta(0 - 1) = \frac{3}{2}\theta \end{aligned}$$

هنا هلاقي ان دي طلعت constant بالتالي ال System ده هيكون stable

بس لما احب اختار الاحسن يبقى الاولاني احسن لانه طلع Zero وال Zero اقل من ال Constant طبعا فا هيطلع Error اقل ☺

Ex:

$$X_n = \frac{1}{2^n}$$

a) $r_0 = 1, r_n = \frac{1}{2}r_{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$

b) $p_0 = 1, p_1 = 0.5, p_n = \frac{3}{2}p_{n-1} - \frac{1}{2}p_{n-2}, n > 1$

c) $q_0 = 1, q_1 = 0.5, q_n = \frac{5}{2}q_{n-1} - q_{n-2}, n > 1$

Error case:

$$r_0 = 1 - \epsilon, p_0 = 1, p_1 = 0.5 - \theta, q_0 = 1, q_1 = 0.5 - \theta$$

a)

$$Z^n = r_n$$

$$z^n = \frac{1}{2}z^{n-1}$$

$$z^n - \frac{1}{2}z^{n-1} = 0$$

$$z^{n-1} \left(z - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$z = \frac{1}{2}$$

$$r_n = A \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$r_0 = A = 1$$

$$r_n = \frac{1}{2^n}$$

In case of error:

$$r_n = A \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$r_0 = A = 1 - \epsilon$$

$$r_n = (1 - \epsilon) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{Error} &= X_n - r_n \\ &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \epsilon \left(\frac{1}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \epsilon \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \epsilon = 0$$

So this system is stable.

b)

$$p_n = z^n$$

$$z^n = \frac{3}{2}z^{n-1} - \frac{1}{2}z^{n-2}$$

$$z^n - \frac{3}{2}z^{n-1} + \frac{1}{2}z^{n-2} = 0$$

$$z^{n-2} \left(z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\left(z - \frac{1}{2} \right) (z - 1) = 0$$

$$z = \frac{1}{2}, 1$$

$$p_n = A \left(\frac{1}{2}\right)^n + B(1)^n$$

$$p_n = A \left(\frac{1}{2}\right)^n + B$$

$$p_0 = A + B = 1$$

$$p_1 = \frac{1}{2}A + B = \frac{1}{2}$$

هنطرحهم من بعض:

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}$$

$$A = 1, B = 0$$

$$p_n = \frac{1}{2^n} = X_n$$

In case of error:

$$p_n = A \left(\frac{1}{2}\right)^n + B$$

$$p_0 = A + B = 1$$

$$p_1 = \frac{1}{2}A + B = \frac{1}{2} - \theta$$

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} + \theta$$

$$A = 1 + 2\theta$$

$$B = -2\theta$$

$$p_n = (1 + 2\theta) \frac{1}{2^n} - 2\theta$$

$$\text{Error} = X_n - p_n$$

$$= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} - \frac{2\theta}{2^n} + 2\theta$$

$$= 2\theta - \frac{2\theta}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\theta - \frac{2\theta}{2^n} = 2\theta$$

So the system is stable.

c)

$$\text{let } q_n = Z^n$$

$$q_n = \frac{5}{2}q_{n-1} - q_{n-2}$$

$$Z^n = \frac{5}{2}Z^{n-1} - Z^{n-2}$$

$$Z^n - \frac{5}{2}Z^{n-1} + Z^{n-2} = 0$$

$$\left(Z^2 - \frac{5}{2}Z + 1\right)Z^{n-2} = 0$$

$$Z^2 - \frac{5}{2}Z + 1 = 0$$

$$\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z - 2) = 0$$

$$Z_1 = \frac{1}{2}, Z_2 = 2$$

$$q_n = A(Z_1)^n + B(Z_2)^n$$

$$q_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B(2)^n$$

$$q_0 = 1 \rightarrow A + B = 1$$

$$q_1 = 0.5 \rightarrow 0.5A + 2B = 0.5$$

$$A = 1, B = 0$$

$$q_n = \frac{1}{2^n}$$

Sequences are Equivalent

Error Propagation

$$q_0 = 1 \rightarrow A + B = 1$$

$$q_1 = 0.5 - \theta \rightarrow 0.5A + 2B = 0.5 - \theta$$

$$A = 1 + \frac{2}{3}\theta$$

$$B = -\frac{2}{3}\theta$$

$$q_n = A\left(\frac{1}{2^n}\right) + B(2)^n$$

$$= \left(1 + \frac{2}{3}\theta\right)\left(\frac{1}{2^n}\right) - \frac{2}{3}\theta(2^n)$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3} \theta \left(\frac{1}{2^n} - 2^n \right)$$

$$E = X_n - q_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} - \frac{2}{3} \theta \left(\frac{1}{2^n} - 2^n \right)$$

$$= \frac{2}{3} \theta \left(2^n - \frac{1}{2^n} \right)$$

$$n \rightarrow \infty \rightarrow E_n = \frac{2}{3} \theta (\infty - 0) = \infty$$

So system is unstable

Solution of Non Linear Equations

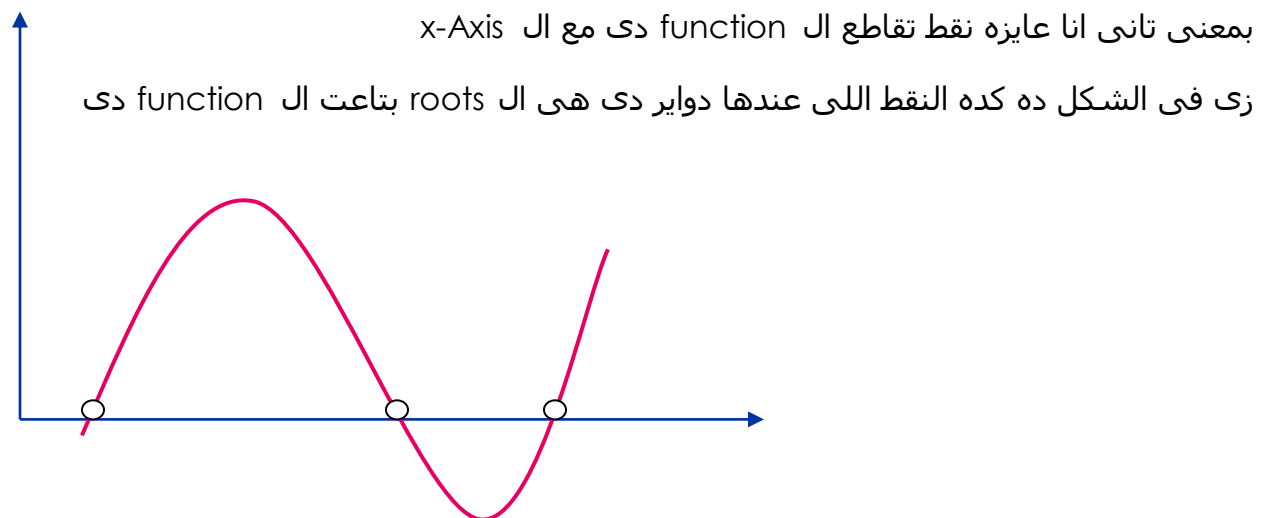
1- Fixed Point Iteration

فى الطبيعى بتاعنا ان لما اقول عايزه احل معادله على شكل:

$$F(x) = 0$$

ده معناه ان انا عايزه القيم بتاعت x اللى لما اعوض بيها فى ال function الناتج يكون zero

بمعنى ان انا عايزه ال roots بتاعت المعادله دى



طيب الطبيعى ان احنا نقدر نطلع الحل ده Exact زى ما احنا متعودين, الجديد بقى ان احنا عايزين نشوفه Approximated يعنى نحله بال Numerical Methods

فى طرق بتعمل حاجة اسمها Finding the root يعنى بتوصلنا لرقم قريب اوى من ال root الطرق دى اللى هى رقم 1 و 3

اما الطرق رقم 2 دى بتعمل حاجة اسمها Locating the root يعنى بتحدد اصغر interval ال root موجود فيها

طيب ليه هندرس الخمس طرق كلهم لما كلهم بيعملوا نفس الحاجه؟

لان كل طريقه منهم بتحل شكل معين من ال functions و فى كل طريقه هندرسها لازم نعرف عنها 3 حاجات اساسية هما دول اللى بفاضل بيهم بين كل طريقه و طريقه واقدر عن طريقهم احدد ايه هى احسن Method احل بيها المسأله اللى قدامى ال 3 حاجات دول هما:

Workability Condition

Convergence Test

Rate of Convergence

ال workability condition هوا بالظبط زى ما اكون بقول امته ينفع استخدم ال Method دى

ايه الشروط اللى لما تتحقق فى المسأله استخدم ال Method دى علشان احلها بيها

و فى كل طريقه هناخدوها هنقول على ال workability conditions بتاعتها علشان نعرف امته نستخدمها

ال convergence test بقول فيها هل الطريقه دى لما بستخدمها بتقربنى من الحل ال Exact ولا بتبعد عنه ؟

يعنى مثلا ممكن يكون فى مسأله اقدر احلها ب 3 طرق كلهم ال workability conditions بتاعتهم متوفره فى المسأله دى طيب هختار بينهم على اساس ايه؟

على اساس ال convergence test ده لان ممكن يكون فى طريقه بتبعدنى عن الحل اللى انا عايزاه و طريقه ثانيه بتقربنى منه فا طبعا هختار الطريقه اللى بتعمل converge ☺

اخر حاجة بقى الى هى ال rate of convergence اللى هى معدل التقارب

او بمعنى اخر هى عدد ال iterations اللى المفروض اعملها علشان اوصل لحل approximated ال root فى عدد معين من ال digits

يعنى زى ما اقول كده مثلا ايه هى عدد ال iterations اللى المفروض اعملها علشان اوصل لل

Root approximated to 6 digits

طیب لنفترض ان المسأله ينفع تتحل بطريقتين و كلهم بيعمل converge هختار على اى اساس؟

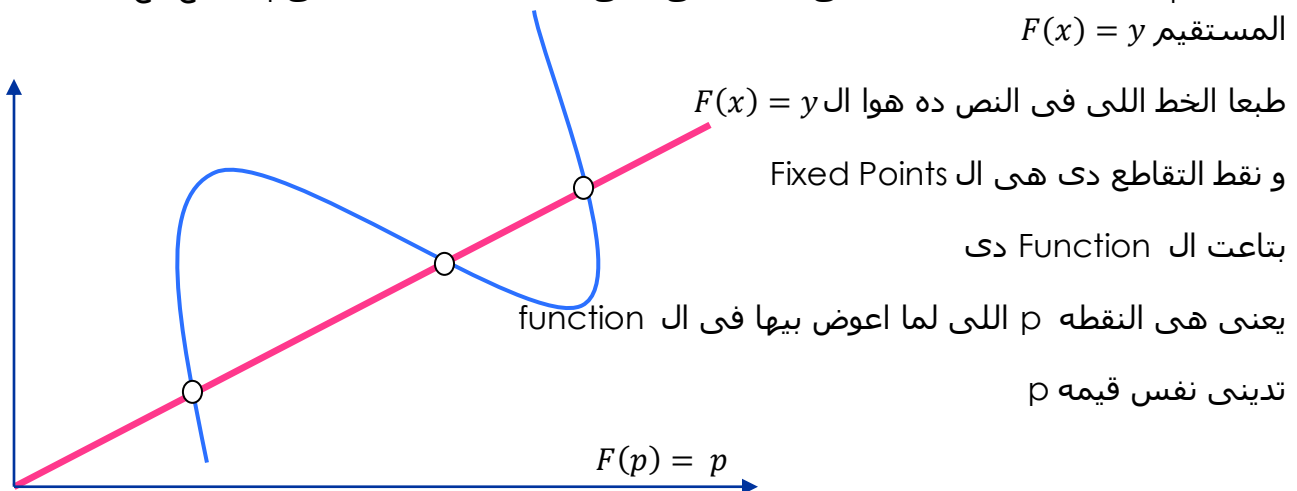
على اساس ال rate of convergence يعنى اشوف مين فيهم بيوصلنى للحل اللى انا عايزاه فى عدد iterations اقل لان ده اللى هيبقى احسن طبعا ☺

هنتكلم عن اول طريقه فقط و هنشوف ازاى نعمل ال

Workability condition, Convergence test, Rate of convergence

طيب اولاً عايزين نفهم يعنى ايه fixed point اصلاً

ال fixed point لـ $F(x)$ هيا النقط اللى على ال function دى اللى بتتقاطع مع الخط المستقيم $F(x) = y$



طيب ايه علاقه الموضوع ده بقى بال root بتاع ال function اصلاً ؟

اولاً فى ال Method دى بيقول انه علشان اطلع ال root بتاع $F(x)$ لازم اكتبها على شكل

$$F(x) = x - f(x)$$

و اطلع ال fixed point بتاعت ال $f(x)$ دى و بالتالى هتكون هيا ال root بتاع $F(x)$

طيب انا بقول نشوف مثال احسن ☺

لو قلنا مثلاً عندنا Function بالشكل ده:

$$F(x) = \sin x - x$$

و عايزه احطها على شكل

$$F(x) = x - f(x)$$

يعني اخلوها على شكل x ناقص اي حاجه

في المثال ده واضح ان ال $f(x) = \sin x$

طيب نشوف مثال مش واضح كده

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

عايزه اطلع x لوحدها

$$2x = x^2 + 1$$

$$x = \frac{x^2 + 1}{2}$$

او ممكن اقول

$$x^2 = 2x - 1$$

$$x = \sqrt{2x - 1}$$

و من هنا اقدر اقول ان ال function اقدر اطلع ليها اكر من $f(x)$

طيب نرجع لموضوعنا اصلا بقى

احنا عايزين نطلع ال Fixed points بتاعت $f(x)$ اللي طلعتها دي على اساس ان هي دي هتبقى ال root بتاعت $F(x)$ و ده اللي انا عايزه اوصله اصلا

طيب على اي اساس الكلام ده صحيح؟

احنا مش قلنا ان ال root هوا القيمه اللي لما اعوض بيها في ال function تديني zero

و قلنا احنا هنحط $F(x)$ على شكل:

$$F(x) = x - f(x)$$

و هنجيب ال fixed point بتاعت $f(x)$ و اتفقنا ان معنى fixed point ان

$$f(p) = p$$

طيب لو افترضنا ان ال p دي هي ال fixed point ل $f(x)$ و عوضت عن ال p في ال $F(x)$

هتطلع كده:

$$F(p) = p - f(p)$$

$$= p - p = 0$$

بما انها بتساوى zero ببقى هى كده root ☺

طيب ده معناه ايه ؟

معناه ان فى ال Method دى هيبقى كل شغلنا على ال $f(x)$ و دى اساسى given فى المسأله ☺ يعنى مش هنعد نطلعها فى الامتحان ان شاء الله

طيب فى سؤال هنا بقى, احنا من شويه قلنا ان ال $f(x)$ ممكن ببقى ليها اكر من شكل

طيب هختار مين فيهم ؟

مش ممكن واحده منهم مثلا ميكونش ليها اصلا fixed points ؟

ده بقى اللى بنقول عليه workability conditions

Workability conditions:

علشان اختار $f(x)$ اللى هشتغل عليها لازم تحقق 3 حاجات:

- 1- $f(x)$ on set
- 2- $f(x)$ everywhere defined
- 3- $f(x)$ is a continues function

طيب يعنى ايه كل واحده من دول بقى ☺

نشوف كده واحده واحده, اولاً يعنى ايه ان ال function تكون on set

المسائل اللى من النوع ده الدكتور لازم هتقول على Interval معينه نحل فيها المسأله

طيب لو افترضنا ان ال Interval اللى عندى $[a,b]$ المفروض علشان اقول ان ال function دى onset على ال interval دى ان لما اعوض فى ال Function بأى نقطه فى ال Interval تدبنى نقطه جوا ال Interval دى برضوه

ازاى يعنى ؟

لو افترضنا ان الشكل ده هوا ال function و ان ال interval هى $[0,1]$

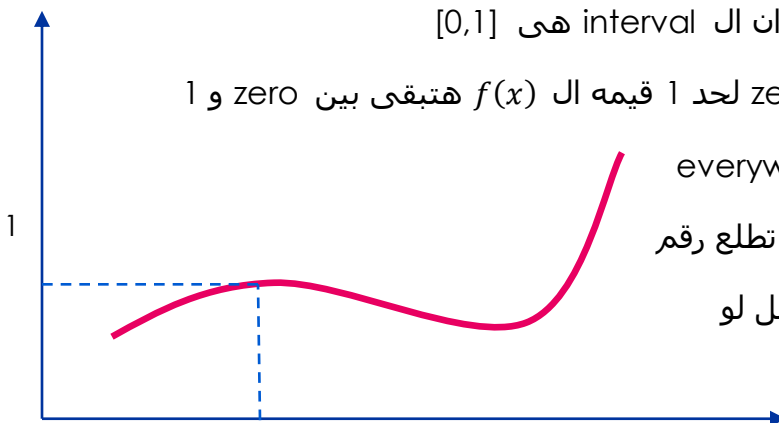
هلاقى ان انا لو عوضت بأى قيمه من ال zero لحد 1 قيمه ال $f(x)$ هتبقى بين zero و 1

تانى حاجه بقى انها تبقى everywhere defined

والكلام ده معناه ان لما اعوض فيها بأى رقم تطلع رقم

Real مش complex و ده عادتاً ممكن يحصل لو

ال function فيها جذر او ليها مقام



بالنسبة بقى للشرط الثالث فا كلنا عارفين يعنى ايه ال function تبقى
 1
 Continues عموما اى polynomial or trigonometric function او مجموع منهم هوا عباره
 continues function عن

تمام كده؟

كده خلصنا ال workability conditions الحمد لله ☺

Convergence test:

احنا اتفقنا ان دايما فى المسأله هيقولى على ال Interval اللى هحل فيها
 دلوقتى بقى انا عايزه اعمل كذا iteration كده علشان اشوف هوا الطريقه دى بتقربنى من
 الحل و لا بتبعدنى عنه ؟

اولا انا هبدأ بأى نقطه فى ال interval دى و هسميها p_0 و هبدأ من عندها احسب
 $p_1, p_2, \dots, p_n$ و هكذا

طيب هحسبهم ازاي؟

$$p_1 = f(p_0)$$

$$p_2 = f(p_1)$$

$$p_n = f(p_{n-1})$$

يعنى كل نقطه هطلعها هعوض بيها فى ال function تانى علشان اجيب قيمه اللى بعديها و
 هكذا

طيب امته هقف و اقول انا تقريبا وصلت للحل ؟

لما اوصل ان

$$p_k \approx f(p_k)$$

انا كتبت تقريبا بتساوى لان احنا بندور على حل approximated

يعنى فرضا لو انا فضلت اعمل iterations لحد ما وصلت ل $p_4 = 2$ مثلا

و جيب اعوض بيها فى ال function علشان اجيب ال iteration اللى بعدها لقيت الناتج طلع
 مثلا

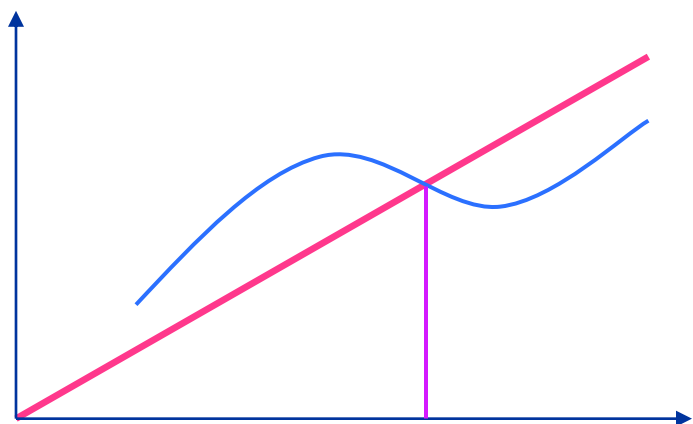
$$f(2) = 1.9999$$

مثلا يعنى, اذن انا كده هقف خلاص لان دى اقدر اعتبرها fixed point تقريبا.

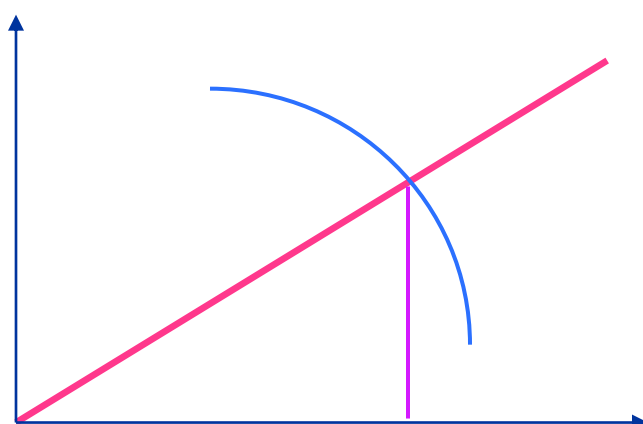
طيب فى طريقتين بقى اقدر اعرف بيهم اذا كانت ال function دى بتعمل converge ولا diverge فى طريقه اللى هى هنستخدمها دايمًا اللى هى mathematically يعنى بعوض فى rule معينه, و فى طريقه عن طريق ال graph

هنقول الطريقه بتاعت ال graph الاول, هفترض مثلاً ان انا عندى 4 functions بالشكل ده:

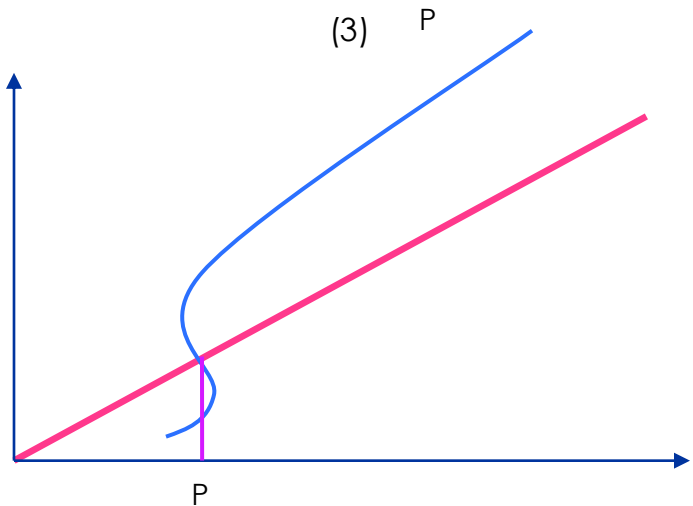
(1)



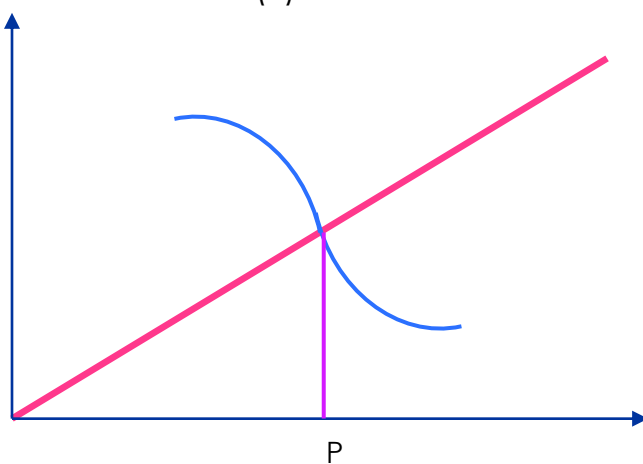
(2)



(3)

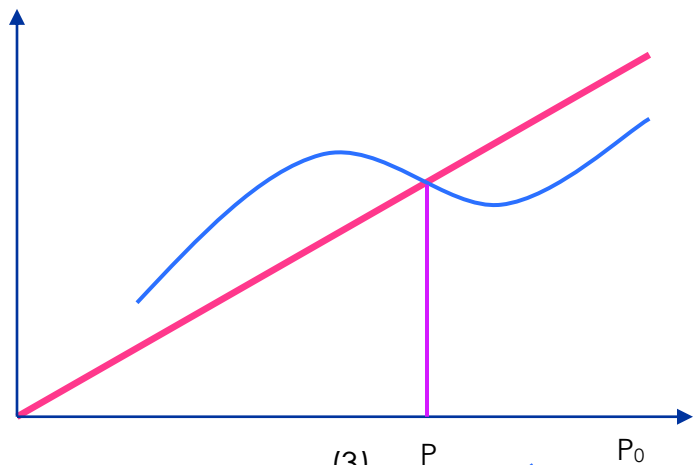


(4)

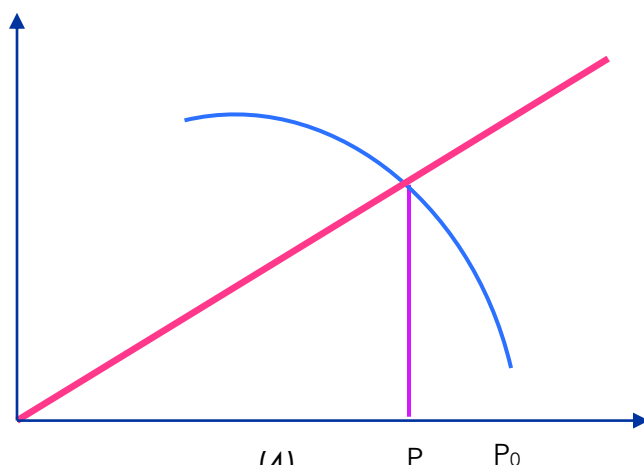


وبعدين بقى دلوقتى انا عارفه فين ال p اللى هى fixed point اللى انا عايزه اوصلها فا الخطوه الاولى ان انا اختار p_0 لكل function:

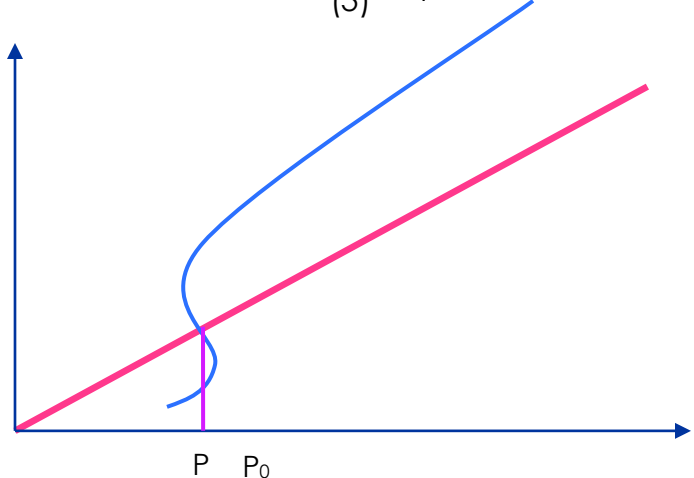
(1)



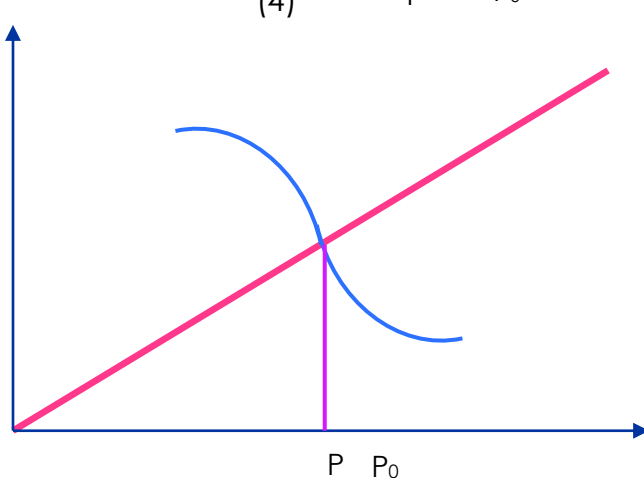
(2)



(3)

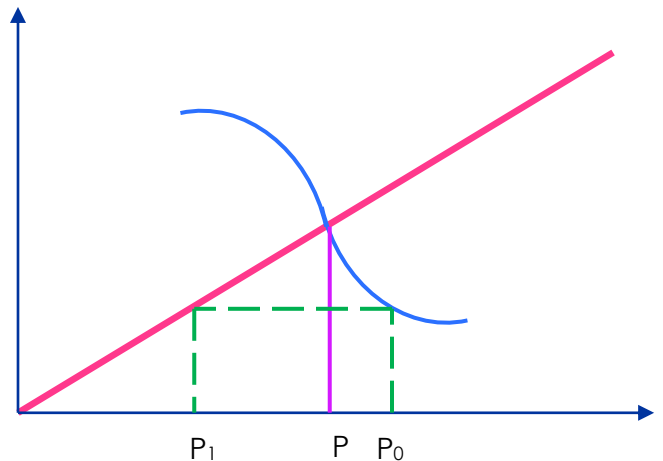
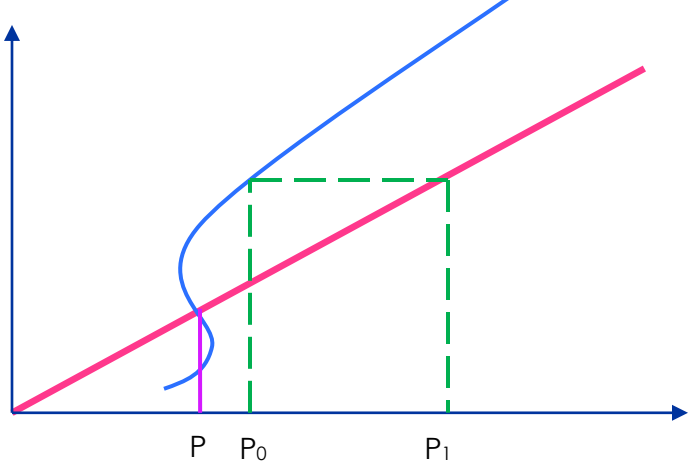
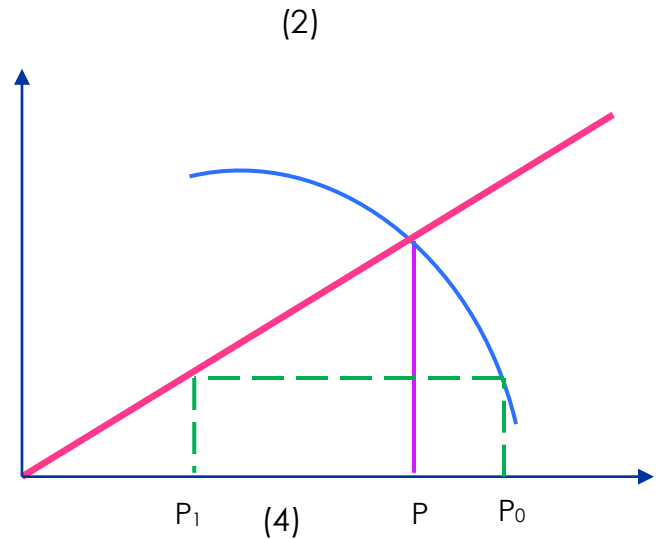
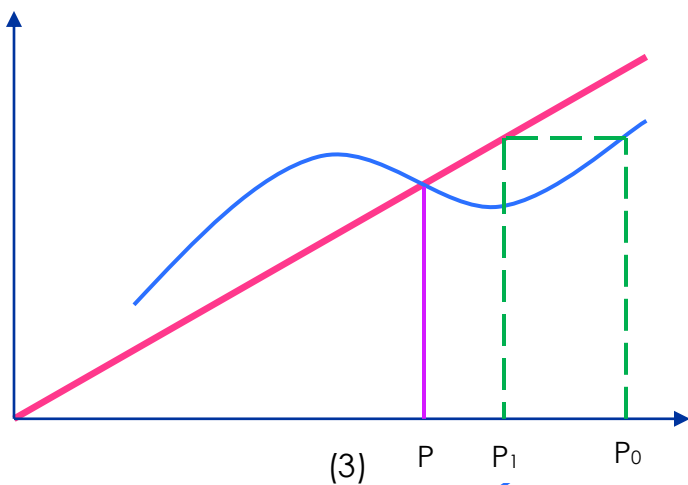


(4)



بعد كده همشى من عند p_0 لحد ال function و علشان اجيب قيمه p_1 همشى من عند ال function لحد الخط المستقيم و من الخط ده انزل لحد x - Axis و هكذا بقى

لو عايزه قيمه p_2 هروح من مكان p_1 و اطلع لحد ال function و من النقطة اللى هوصل عنها هروح عند الخط المستقيم و انزل تانى على x - Axis



و هفضل نعمل ال iterations دى كذا مره بقى بنفس الطريقه علشان اعرف اذا كنت بقرب من
ال p ولا يبعد عنها فى ال 4 functions اللى فوق دول هلاقى ان 1 و 2 converge و 3 و 4
diverge

طيب الطريقه التانيه بقى هى ان انا اعوض بطرفين ال interval فى القانون ده :

$$|f'(x)| \leq k < 1$$

ال k هى اكبر رقم هيطلع نتيجة التعويض

يعنى اول حاجه هعملها هفاضل $f'(x)$ و بعدين هاخذ طرفين ال interval و اعوض بيهم فى
 $f''(x)$ و بعدين اخذ absolute القيمتين اللى هيطلعوا عندى و اخذ القيمة الكبيره فيهم و
هسميها k لو ال K دى اقل من الواحد يبقى كده ال function دى converge على ال
Interval دى غير كده تبقى ☺ diverge

Rate of convergence:

كده وصلنا لآخر حاجه المفروض نعملها اللي هي نعرف انا هعمل كام iteration فى المسأله علشان اوصل للحل اللي انا عايزاه.

طيب فى قانون بعوض فيه علشان اعرف و دى اسهل حاجه

$$n > \frac{(\log \frac{\epsilon_{0max}}{0.5} + d)}{\log \frac{1}{k}}$$

وده بقى القانون اللي وصلنا ليه فى الآخر و اللي المفروض هنستخدمه بقى بعد كده علشان اعرف ال n اللي هي عدد ال iterations اللي المفروض اعملها علشان اوصل لحل approximated بعدد معين من ال decimal digits

n -> # iterations to obtain the root approximated up to "d" decimal digits

احسن حاجه بقى ناخذ مسأله نعمل فيها كل الحاجات دى علشان نفهم بنحل ازاي ☺

Example:

- (i) Investigate the workability of the fixed point iteration algorithm to find the root:-

$$F(x) = x^2 - 4x + 2.3 = 0$$

Contained in the interval [0,1.5], if the iterating functions are:

$$(a) f(x) = \frac{x^2 + 2.3}{4}$$

$$(b) f(x) = \sqrt{4x - 2.3}$$

- (ii) Having selected the iterating function, investigate the local convergence, determine "n" to obtain root up to 4 digits
- (iii) Evaluate the second root contained in the interval [2.5,4] up to 4 decimal digits
- (iv) If we take $f(x) = 4 - \frac{2.3}{x}$ on the interval [2.5,4].

احنا هنحل دلوقتى رقم 1 و 2 اما رقم 3 و 4 هنتقول الحل النهائى بتاعتهم و هنتقول نقطه مهمه كده فيهم و المحاضره اللي جايه ان شاء الله هيطلع منا ناس يحلوهم ☺

رقم 1:

عايزنى اعمل workability conditions على ال 2 functions الى قال عليهم علشان نشوف مين فيهم ينفع استخدمه فى ال Interval دى

هناخذ اول واحده اللي هي:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2.3}{4}$$

عايزه اثبت انها On set هعمل ايه ؟

هعوض بطرفين ال interval فيها لو طلعت القيمة داخل ال Interval دي تبقى هي كده on set

$$f(0) = 0.575 \in [0, 1.5]$$

$$f(1.5) = 1.1375 \in [0, 1.5]$$

يبقى هي فعلا on set طيب بالنسبة ل everywhere defined هي فعلا هتحقق الشرط ده لانها مفيش فيها جذر او x فى المقام

وطبعا بما انها polynomial فا اكيد هتبقى continues

يبقى هي كده نقدر نستخدمها

طيب ال function التانيه

$$f(x) = \sqrt{4x - 2.3}$$

هعوض بطرفين ال Interval علشان اعرف هي on set ولا لا

$$f(0) = \sqrt{-ve}$$

يبقى هي كده مش on set و بالتالى مينفعش استخدمها يبقى اكيد هاخذ ال function الاولى

كده خلصنا رقم 1

رقم 2:

عايزنى اعرف بقى ال function اللي انا اخترتها دي converge ولا لا و لو فعلا converge عايزه يعرف هيعمل كام iteration علشان يوصل لقيمة approximated up to 4 digits

اول حاجه نعمل ال test of convergence

هفاضل ال function واعوض بطرفين ال interval

$$f'(x) = \frac{x}{2}$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(1.5) = \frac{3}{4}$$

هتار الكبير فيهم و اسميه k

$$k = \frac{3}{4}$$

طيب ال k ده اقل من ال 1 ؟

اه اقل يبقى كده دى converge

طيب نشوف بقى ال n

$$n > \frac{(\log \frac{\epsilon_{0max}}{0.5} + d)}{\log \frac{1}{k}}$$

احنا عندنا ال k و ال d عايزين بس ال ϵ_{0max}

$$\epsilon_{0max} = b - a$$

$$= 1.5 - 0$$

$$= 1.5$$

نعوض فى القانون بقى:

$$n > \frac{\log \frac{1.5}{0.5} + 4}{\log \frac{4}{3}}$$

$$n > 35.83$$

$$n = 36$$

يعنى المفروض اعمل 36 iteration علشان اوصل للحل ☺

كده خلصنا رقم 2

بالنسبة بقى لرقم 3 هلاقى ان ال n = 32 و ال k = 0.7 تقريبا

و فى رقم 4 هلاقى ان ال n = 11 و ال k = 0.3

يعنى المفيد ان كل لما ال k تقل كل ما عدد ال iterations يقل

بس لازم علشان اكارن يبقى ال 2 functions فى نفس ال interval يعنى مينفعش اكارن رقم 1 و 2 مع رقم 3 مثلا لان كل واحدده فيهم ليها interval معينه

لكن انا هنا قارنت بين 3 و 4 لان هما الاتنين ليهم نفس ال interval ☺

Ex:

$$f(x) = -4 + 4x - \frac{x^2}{2}$$

1- Find the fixed points

2- $p_0 = 1.9$ Find p_1, p_2, p_3 and find the relative error for each.

3- $p_0 = 3.8$ Find p_1, p_2, p_3 and find the relative error for each.

اولا علشان نطلع ال fixed points هنقول ان:

$$x = f(x)$$

ونعوض و نحل على هذا الاساس بقى

$$x = -4 + 4x - \frac{x^2}{2}$$

$$x + 4 - 4x + \frac{x^2}{2} = 0$$

هنضرب فى 2

$$2x + 8 - 8x + x^2 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x = 2, 4$$

يبقى ال fixed points هى 2 و 4.

المطلوب التانى بقى قالى على ال initial iteration و عايز يجيب 3 iterations بعدها فا هنعوض فى القانون اللى هوا:

$$p_{n+1} = f(p_n)$$

نعوض بقى:

$$p_1 = f(p_0) = f(1.9) = 1.795$$

علشان نطلع ال error المفروض نكون عارفين ال exact value طيب المفروض انها هتكون ال fixed point بس هختار مين ؟ ال 2 ولا ال 4 ؟

فى الحالة دى هختار ال 2 علشان ال Initial iteration اقرب ليها

يبقى ال error هيطلع كده:

$$R_E = \frac{2 - 1.975}{2} = 0.1025$$

و كذلك بقى لكل ال iterations الباقيه

$$p_2 = f(1.795) = 1.5689$$

$$p_3 = 1.04508$$

طبعا واضح ان احنا بنعمل diverge من ال fixed point

اللى بعديها نفس الكلام بس بدأ ب initial iteration مختلفه بس

$$p_1 = f(p_0) = f(3.8) = 3.98$$

هنا علشان نطلع ال error لازم اختار fixed point تبقى هى ال exact value و هنا هختار ال 4 علشان هى الاقرب

$$p_2 = 3.9998$$

$$p_3 = 3.9999998$$

وهنا بنعمل converge ☺

عادت المسائل اللى زى دى الافضل نوضحها فى جدول كده علشان مش نتلغيط فى الارقام

K	P_k	E_k
0	1.9	0.1
1	1.795	0.205
2	1.5689	0.431
3		

وده الثانى:

K	P_k	E_k
0	3.8	0.2
1	3.98	0.02
2	3.9998	$2 * 10^{-4}$
3	3.9999998	$2 * 10^{-8}$

ال E_k هنا هي ال absolute error.

Ex:

$$g(x) = x^2 + x - 4$$

Can you solve this equation using fixed point iteration method?

هنا ببسأل اذا كانت المعادله دي ينفع احلها باستخدام ال fixed point iteration ولا لا

طيب اصلا علشان احل اى معادله بال fixed point iteration method لازم تكون workable و
كمان تعدى ال convergence test يعنى تكون convergent مش divergent فا احنا هنطبق
الكلام ده على ال equation اللى فوق دي و لو حقيقته بيقى ينفع نحل بال fixed point ولو مش
حقيقته بيقى مينفعش

طيب فى سؤال طبيعى: فين ال Interval؟

لما ميكونش مدينى interval كده ده معناه انه لازم اجيب ال fixed points بتاعت ال function
دى و هما دول الى هيبقى ال interval بالنسبه للمسأله دي

طيب نجيب ال fixed points

$$x = g(x)$$

$$x = x^2 + x - 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

Workability conditions:

On set:

$$g(2) = 2$$

$$g(-2) = -2$$

So it's on set and it's everywhere defined and continues in this interval so it's workable

Convergence test:

$$g'(x) = 2x + 1$$

$$g'(2) = 5$$

$$g'(-2) = 3$$

Both are bigger than 1 so this function is divergent

وده معناه انه مينفعش نستخدم ال fixed point iteration method علشان نحل ال equation
دى ☺

Ex:

$$g(x) = \frac{x + \frac{9}{x}}{2}$$

- 1- Verify that $p = 3$ is a solution for $p = g(p)$
- 2- Find $g'(x)$ and $g'(3)$
- 3- $p_0 = 3.1$ Find p_1, p_2 , will the iteration converge to fixed point $p = 3$? Why?

هنا اول حاجه طلبها ان اثبت ان 3 دى عبارة عن fixed point لل equation

طيب علشان ال 3 تبقى fixed point لازم تحقق الشرط:

$$g(3) = 3$$

نعوض بقى و نشوف:

$$g(3) = \frac{3 + \frac{9}{3}}{2} = \frac{3 + 3}{2} + \frac{6}{2} = 3$$

يبقى فعلا ال 3 دى fixed point

تانى حاجه عايزنى اعمل ال convergence test

$$g'(x) = \frac{\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)}{2}$$

$$g'(3) = 0$$

بما ان ال 0 اقل من 1 يبقى دى كده convergent

اخر حاجه قالى على initial iteration و عايزنى اجيب 2 iterations بعديها

$$p_1 = f(3.1) = 3.001612903$$

$$p_2 = 3.00000433$$

وطبعا واضح ان ال iterations بتقرب لل fixed point اللى هى 3 ☺

Ex:

Given $g(x), g'(x)$ are continuous on the interval $[a, b]$, $|g'(x)| > 1$ if the fixed point is P and the initial iteration and the second iteration is p_0, p_1 prove that:

$$|E_1| = |p - p_1| > |p - p_0| = |E_0|$$

هنا يقول ان في function وال derivative بتاعها الاتنين continues على interval معينه

وان ال function دى divergent لان ال $|g'(x)| > 1$ و عايز بقى يثبت ان ال error عند ال iteration الثانيه اكبر من ال error عند ال iteration الاولى

المفروض بما ان ال function اصلا divergent يبقى ال error بيزيد مع كل iteration

Given that $|g'(x)| > 1$ then the function is divergent so p_0 & p_1 diverge from the fixed point P so the error increases.

Given $g(x) = 3(x - 2.25)^{\frac{1}{2}}$

- Find the fixed points
- $p_0 = 4.4$ Find p_1, p_2, p_3, p_4
- $p_0 = 4.6$ Find p_1, p_2, p_3, p_4
- Is p_1, p_2, p_3, p_4 converge?

(1)

$$x - g(x) = 0$$

$$x = g(x)$$

$$x = 3(x - 2.25)^{\frac{1}{2}}$$

$$x^2 = 9(x - 2.25)$$

$$x^2 - 9x + 20.25 = 0$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 * 20.25}}{2}$$

$$x = 4.5, 4.5$$

There is only one fixed point $x = 4.5$

(2)

$$p_0 = 4.4$$

$$p_{n+1} = g(p_n)$$

$$p_1 = g(p_0) = g(4.4) = 3\sqrt{4.4 - 2.25} = 4.398861$$

$$R_1 = \frac{4.5 - 4.398861}{4.5} = 0.02247$$

And so on for the rest

Putting all values in a table, we get

N	P_k	E_k	R_k	Note
0	4.4	0.1	0.02222	This sequence diverges from the fixed point 4.5
1	4.39886	0.10114	0.02247	
2	4.39770	0.1023	0.02273	
3	4.39651	0.10349	0.023	
4	4.39529	0.10471	0.02327	
0	4.6	0.1	0.02222	This sequence converges from the fixed point 4.5
1	4.59891	0.09891	0.02198	
2	4.59785	0.09785	0.02174	
3	4.59681	0.09681	0.02151	
4	4.59579	0.09579	0.02129	

Example:

$$F(x) = x^2 - 4x + 2.3 = 0$$

If the iterating functions are:

$$(c) f(x) = \frac{x^2 + 2.3}{4}$$

$$(d) f(x) = \sqrt{4x - 2.3}$$

(v) Evaluate the second root contained in the interval [2.5,4] up to 4 decimal digits

(vi) If we take $f(x) = 4 - \frac{2.3}{x}$ on the interval [2.5, 4].

اول واحد هنجرب عليها ال iteration functions 2 علشان نشوف مين فيهم workable في ال interval دى

$$f(x) = \frac{x^2 + 2.3}{4}$$

On set:

$$f(2.5) = 2.1375$$

$$f(4) = 4.575$$

Not on set so it's not workable

$$f(x) = \sqrt{4x - 2.3}$$

On set:

$$f(2.5) = 2.7748$$

$$f(4) = 3.7013$$

Everywhere defined because each point x has a value $f(x)$ in this interval

And it's a continuous function.

Convergence test:

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x - 2.3}}$$

$$f'(2.5) = 0.7207$$

$$f'(4) = 0.5403$$

$$k = 0.7207 < 1$$

So it's convergent

Rate of convergence to gain an approximated value up to 4 decimal digits:

$$n > \frac{\log\left(\frac{1.5}{0.5}\right) + 4}{\log\left(\frac{1}{0.7207}\right)}$$

$$n > 31.474$$

$$n = 32 \text{ iteration}$$

نحل الثانيه بقى

$$f(x) = 4 - \frac{2.3}{x}$$

On set:

$$f(2.5) = 3.08$$

$$f(4) = 3.425$$

It also everywhere defined and continues so it's workable

Convergence test:

$$f'(x) = \frac{2.3}{x^2}$$

$$f'(2.5) = 0.368$$

$$f'(4) = 0.1437$$

$$k = 0.368 < 1$$

So it's convergent

Rate of convergence to gain an approximated value up to 4 decimal digits:

$$n > \frac{\log\left(\frac{1.5}{0.5}\right) + 4}{\log\left(\frac{1}{0.368}\right)}$$

$$n > 10.312$$

$$n = 11 \text{ iteration}$$

ويس بعد كده نعمل الجدول و نطلع ال Iterations بقى لحد ما نوصل لل Root.

كده المسأله خلصت

فاضل شويه حاجات بسيطه كده هنقولها فى ال method دى و بعدين هناخد حاجه جديده بقى

**لو انا بعمل iterating و المفروض عايز الرقم approximated up to 4 digits مثلا فا المفروض ان انا هيبقى عندى قيمه p_0 و منها هاجيب باقى ال iterations

طيب امته هقف و اقول خلاص كده انا وصلت يعنى ؟

هقف لما الاقى ان ال iteration اللى وصلت لها شبه اللى قبلها فى عدد ال digits اللى انا عايزها

يعنى فرضنا مثلا ان فى iteration كانت كده : 0.123597

و اللى بعديها كانت كده: 0.123571 فا هنا هلاحظ ان اول 4 ارقام زى بعض بالتالى انا كده هقف خلاص لان انا عايزاه approximated up to 4 digits بس

**تانی حاجه لو انا بعمل ال convergence test و طلع عندی قیمه اکبر من الواحد و قیمه اقل هل کده ینفع اطبق علیها ال fixed point iteration method ؟

الاجابه اه بس هیبقی فی مشاكل کده

مثلا لو قلنا ان ال interval هی $[a, b]$

$$f'(a) > 1, f'(b) < 1$$

فی الحاله دی علشان ال fixed point iteration تنفع لازم ال initial iteration قریبه من ال b لان هی اللی اقل من ال 1 لکن لو کانت قریبه من ال a فال method دی مش هتنفع اصلا.

طیب کده نکون خلصنا اول Method

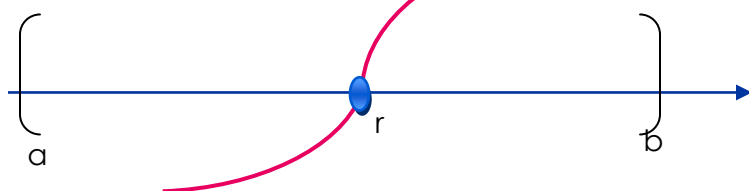
2- Bisection Method

الطریقه دی زی ما قلنا قبل کده بتعمل locating ال root و هنعرف بالتفصیل هی بتعمل کده ازای

من دلوقتی ان شاء الله هیبقی کل شغلنا مع ال $F(x)$ یعنی مش هنجیب $f(x)$ تانی خلاص هی خاصه بال fixed point بس

الفکره فی ال bisection انها بتقسم ال Interval جزئین اد بعض و تختار الجزء اللی فی ال root و تقسمه تانی و تختار الجزء اللی فی ال root و هکذا

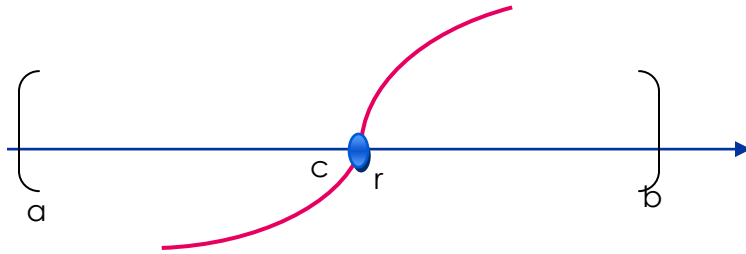
یعنی مثلا لو عندی function شکلها کده و ال Interval هی $[a, b]$



هقوم انا اقسم ال interval جزئین عن طریق القانون:

$$c = \frac{b + a}{2}$$

هلاقی انها بقت كده:



بعد كده هتشوف ال root موجود فى انهى interval هل هو موجود فى $[a, c]$ ولا فى $[c, b]$ ؟
هلاقی انه فى $[c, b]$ فا هاخذها و اقسّمها اتنين تانى و اجيب c_1 مثلا فى النص و اشوف ال root موجود فى و هكذا لحد ما اجيب اصغر interval ال root موجود فيها
طيب ازاى نعرف ال root موجود فى ؟
هنعرف بقى فى ال workability conditions بس دى الفكرة العامة يعنى

Workability Conditions:

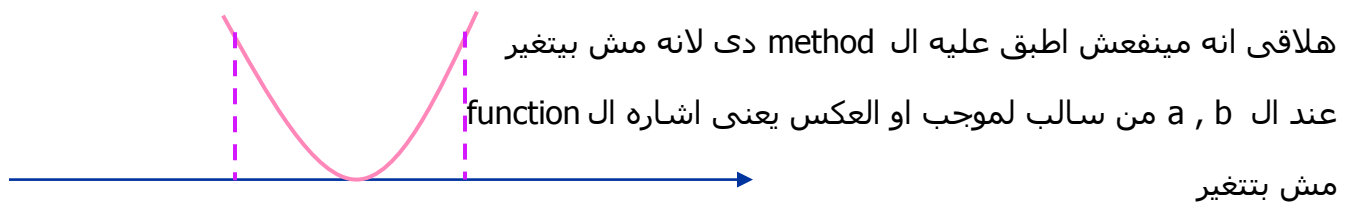
- 1- Continues Function
- 2- Sign $F(b) \neq \text{Sign } F(a)$
- 3- $[a, b]$ must contain single root

طيب الاولانى سهل و كلنا عارفينه لكن ايه التانى ده ؟

بصوا طيب هنتفق على حاجه مش ال root ده عبارة عن نقطة تقاطع ال function مع ال X axis طيب تمام

طيب علشان ال curve بتاع ال function يتقاطع لازم اكيد هيكون جزء من موجب يعنى فوق ال X-axis و جزء تانى هيبقى سالب يعنى تحت ال X-axis ال function اللى رسمناها دى مثلا

طيب ده معناه ان لو عندى function زى كده مثلا:



هلاقی انه مينفعش اطبق عليه ال method دى لانه مش بيتغير

عند ال a, b من سالب لموجب او العكس يعنى اشاره ال function

مش بتتغير

طيب كده ببقى انا عرفت الطريقة الى اقدر بيها احدد ال root فى انهى interval علشان اختارها

انا مثلا عندى a, b هعوض بيهم فى ال function لو لقيت واحده طلعت -ve و التانيه +ve ببقى تمام اقدر استخدم ال bisection

تانى خطوه هقسم ال Interval اتنين عند النقطه اللى فى النص و لنفترض ان اسمها c مثلا وبعدين هعوض فى ال function بال c دى لو لقيتها $-ve$ بيقى هلغى النقطه الى كانت طلعت $-ve$ و اخدها مكانها ولو طلعت $+ve$ هلغى النقطه اللى كانت طلعت $+ve$ قبلها و اخدها مكانها نشوف كده الموضوع ده فى جدول هيبقى منظم اكر :

K	$A_i (-ve)$	$B_i (+ve)$	C_i	$F(C_i)$
0	a_0	b_0	$c_0 = \frac{b_0 + a_0}{2}$	+ve
1	a_0	c_0	$c_1 = \frac{c_0 + a_0}{2}$	-ve
2	c_1	c_0	$c_2 = \frac{c_1 + c_0}{2}$	-ve

طيب اللى حصل هنا ان اول حاجه انا عوضت بحدود ال interval اللى قال عليها الى هى a_0, b_0 و حددت كل واحده هى عمود ال $-ve$ ولا ال $+ve$ و افترض ان قيمه ال A هى ال $-ve$ وال B هى ال $+ve$ و بعدين طلعت قيمه ال c_0 و عوضت بيها فى ال function لقيتها $+ve$ فا كده هشيل القيمه اللى فى عمود ال $+ve$ و احط ال c_0 مكانها و القيمه اللى فى عمود ال $-ve$ تنزل زى ما هى و ابدأ احسب ال iteration اللى بعدها على اساس حدود ال interval الجديد

طيب لو افترضنا ان ال root كان موجود فى نص ال interval بالظبط ؟

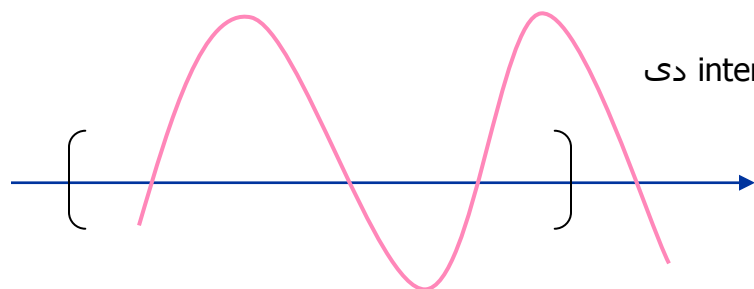
هلاقى ان انا لما اعوض بيه فى ال function هيديني zero و فى الحاله دى هقف مش هعمل iterating تانى لان انا خلاص وصلت لل root

ونفس الكلام هنا لو عايز القيمه بتاعت ال root مقربه ل 4 decimal digits مثلا بيقى هقف لما الاقى ان فى 2 iterations ورا بعض متشابهين فى 4 digits نفس اللى قلناه فى ال fixed point بالظبط

اخر حاجه قالها فى ال workability conditions ان ال interval لازم يكون فيها root واحد بس

طيب و هوا ممكن يكون فيها اكر من root ؟

اه ممكن حاجه زى كده مثلا:



هلاقى ان انا عندي 3 roots فى ال interval دى

و فى الحاله دى مقدرش استخدم

ال bisection method

مؤقتا هنفترض ان الدكتور هتقولنا ان مغيث غير root واحد فى ال Interval او ممكن تقوله بس بطريقه غير مباشره شويه يعنى ☺

Convergence Test

This method is convergent by default

Rate of Convergence

كلنا فاكرين طبعا القانون الى بيقول

$$\epsilon_n < 0.5 * 10^{-d}$$

طيب عظيم جدا

طيب هوا ال error فى الخطوه n ده عبارته عن ايه؟

عباره عن المسافه بين النقطه ال approximated اللى انا وصلت لها اللى هى C و النقطه ال exact اللى انا عايزه اوصلها اللى هى r

يبقى اقدر اقول ان

$$\epsilon_n = |r - c_n|$$

طيب بما ان انا كل مره بقسم ال interval لجزيئين اد بعض يبقى اكيد المسافه بين ال r وال c اقل من نص ال Interval كلها

$$|r - c_n| \leq \frac{1}{2} (b_n - a_n)$$

طيب المسافه اللى هى $b_n - a_n$ دى ايه علاقتها بال interval اللى قبلها؟

مش احنا قلنا ان كل مره بنقسم ال Interval نصين و نختار نص منهم نكمل فيه يبقى اكيد اى interval معايا دلوقتى هى نص ال Interval اللى قبلها

$$|r - c_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} b_{n-1} - a_{n-1} \right)$$

وهكذا لحد ما اوصل ل $b_0 - a_0$ هلاقى ان ال R.H.S بقى شكله كده

$$|r - c_n| \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^n} (b - a) \right]$$

$$\epsilon_n \leq \frac{1}{2^{n+1}} |b - a|$$

$$\frac{|b - a|}{2^{n+1}} < 0.5 * 10^{-d}$$

$$\frac{2^{n+1}}{|b-a|} > \frac{1}{0.5 * 10^{-d}}$$

$$2^{n+1} > \frac{|b-a|}{0.5 * 10^{-d}}$$

$$(n+1) \log 2 > \log|b-a| - \log(0.5 * 10^{-d})$$

$$n > \left[\frac{\log|b-a| - \log(0.5 * 10^{-d})}{\log 2} \right] - 1$$

ودة قانون من النوع اللى بيتحفظ ☺

مثال بقى

Ex:

$$F(x) = x \sin x - 1 = 0$$

Given the interval $[0, 2]$ which has a single real root, determine the number of iteration to obtain the root approximated up to 8 decimal digits?

Workability conditions:

$$F(0) = -1, F(2) = +ve \text{ value}$$

وطبعا هوا قالى ان مغيث غير root واحد فى ال interval دى و طبيعى انها continues يبقى كده هى workable

نعوض فى القانون بتاع ال n بقى علشان نعرف عدد ال iterations

$$n > \left[\frac{\log(2-0) - \log(0.5 * 10^{-8})}{\log 2} \right] - 1$$

$$n > 27.575$$

$$n = 28 \text{ iteration}$$

لو كان قالى هاتى ال root كنت لازم بقى اعمل الجدول اللى اتفقنا عليه و اعمل كام Iteration كده لحد ما اوصل ان شاء الله لرقمين ورا بعض متشابهين فى 8 digits ☺

بس كده

3- False Position Method

ال method دى ليها نفس ال workability conditions وال convergence test بتاعت ال bisection بالطبط ☺

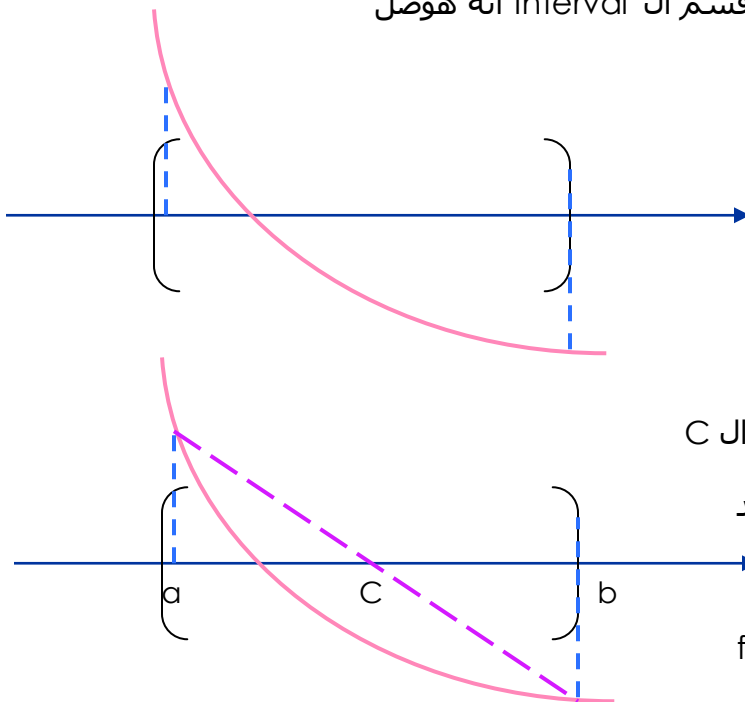
المختلف بس هوا الفكرة بتاعتها وال n مش اكر

هى برضوه بتعمل Locating لل root و بتقسم ال interval برضوه بس بتقسمها بطريقة اسرع غالبا من ال bisection

بصوا كده مثلا على ال function دى و هنتشوف ازاي بتقسم ال Interval فى ال method دى

انا عندي مثلا هنا ال Interval من a to b و طبعا لازم اشارة ال function عند a عكس اشارتها عند b الى انا هعمله بقى علشان اقسم ال Interval انه هوصل

ال $F(a)$ بال $F(b)$



كده نقطه تقاطع الخط ده مع ال X axis هى ال C

علشان اجيب ال iteration اللى بعدها هاخذ

خط من اول ال C لحد ال function

او بمعنى اخر هعوض بال C فى ال function

و اشوفها -ve ولا +ve وادخلها مكان اللى كان واخذ

اشارتها فى ال iteration اللى قبلها، يعنى نفس اللى كنا بنعمله فى ال bisection بالطبط

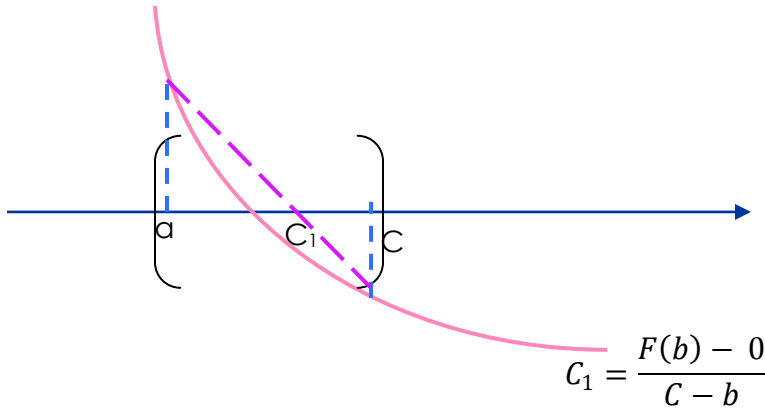
طيب ايه هو القانون اللى اعوض فيه اجيب ال C ؟

فى ال bisection كنا بنقول انه هنقسم بالنص يعنى هجيب ال coordinates بتاعت النقطه اللى فى نص ال interval و خلاص

لكن هنا انا بقسم بالميل يعنى اول مره هيبقى كده

$$C = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

و بعدین لما هاخد ال Interval اللى بعدیها اللى هی المفروض $[a, c]$ الشکل هبقى عامل كده



طبعا zero علشان دى نقطه تقاطع مع ال X axis

وهكذا بقى

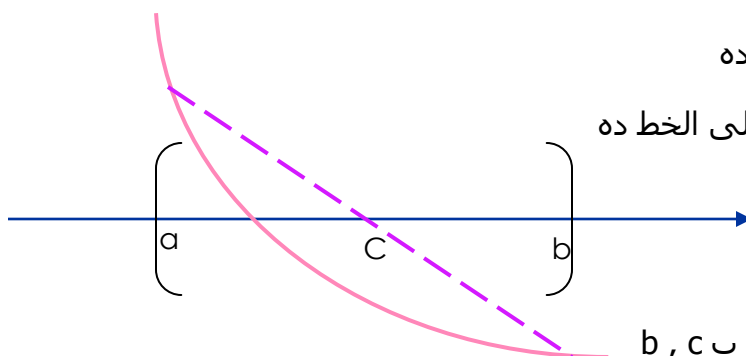
طيب القانون العام اللى اعوض فيه عند اى iteration هو:

$$c_n = b_n - \left[\frac{F(b_n)(b_n - a_n)}{F(b_n) - F(a_n)} \right]$$

بالنسبه لل rate of convergence فال method دى ملهاش قانون لل N يعنى لازم اجرب انا ال iterations بنفسى ☺

اولا كان فى حاجه عايزه اوضحها مكننش فاهماها اوى فى المحاضره اللى هى ازاى طلعتنا القانون بتاع ال False Position فى c_n

دلوقتى احنا كنا قلنا ان فى ال false position بنوصل بين نقطتين الى هما حدود ال interval



طيب دلوقتى انا عايزه اطلع الميل بتاع الخط ده

والميل بنقدر نجيبه لو احنا عارفين نقطتين على الخط ده

دلوقتى انا عارفه 3 نقط اللى هما:

$$(a, F(a)), (b, F(b)), (c, 0)$$

طيب انا هجيبه مرتين مره بال a, b و التانيه ب b, c

$$m = \frac{0 - F(b)}{c - b}$$

هساوی المعادلتین دول بیعض و احلهم علشان اطلع ال C لوحدها:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \frac{-F(b)}{c - b}$$

$$[F(b) - F(a)](c - b) = -F(b)(b - a)$$

$$c - b = \frac{-F(b)(b - a)}{F(b) - F(a)}$$

$$C_n = b_n - \left[\frac{F(b_n)(b_n - a_n)}{F(b_n) - F(a_n)} \right]$$

بس كده هنحل مسائل بقى

Ex:

Using bisection method find number of iterations for some $F(x)$ on the interval

$[2, 7]$ to find the root with accuracy $= 5 * 10^{-9}$

$$5 * 10^{-9} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$0.5 * 10^{-8} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

$$d = 8$$

$$n > \frac{\log(7 - 2) - \log(0.5 * 10^{-8})}{\log 2} - 1$$

$$n > 28.8$$

$$n = 29$$

Ex:

Could we apply the bisection method to the function $F(x) = \frac{1}{x-2}$ on the intervals

$[3, 4]$ and $[1, 7]$?

We should check the workability conditions

Sign $F(a) \neq$ Sign $F(b)$

$$F(3) = 1$$

$$F(4) = \frac{1}{2}$$

So it's not workable in this interval

$$F(1) = -1$$

$$F(7) = \frac{1}{5}$$

So it's not workable in this interval because it's not continuous at $x = 2$

Ex:

Find the root of the following function with the minimum number of iterations:

$$F(x) = x^2 - 10x + 23$$

On the interval $[6, 6.8]$ with $d = 2$?

*Fixed point Iterations:

Finding $f(x)$:

$$f_1(x) = \frac{x^2 + 23}{10}$$

$$f_2(x) = \sqrt{10x - 23}$$

Checking workability conditions on both functions:

$$f_1(6) = 5.9$$

Not on set so it's not workable

$$f_2(6) = 6.09$$

$$f_2(6.8) = 6.7$$

On set, everywhere defined, continuous then it's workable

Convergence test

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{10x - 23}}$$

$$f(6) = 0.822$$

$$f'(6.8) = 0.745$$

$$k = 0.822 < 1$$

So it's convergent

$$n > \frac{\log \frac{0.8}{0.5} + 2}{\log \frac{1}{0.822}}$$

$$n > 25.8$$

$$n = 26 \text{ iteration}$$

*Bisection:

Workability conditions

$$F(6) = -1$$

$$F(6.8) = 1.24$$

And it's continuous function, so it's workable

$$n > \frac{\log 0.8 - \log(0.5 * 10^{-2})}{\log 2} - 1$$

$$n > 6.32$$

$$n = 7$$

*False Position

We don't have a rule to compute the number of iterations in this method, but we know that it's faster than bisection method, so we are going to solve the function using false position method because it's the fastest between them

N	a_n	b_n	c_n	$F(c_n)$
0	6	6.8	6.34	-0.16
1	6.34	6.8	6.41	-0.02
2	6.41	6.8	6.41	$-2.76 * 10^{-2}$

Notice that the number of iterations we needed in bisection was 7, while in the false position we needed only 3 iterations.

Ex:

$$\frac{\pi(d^3 - 3d^2r + 4r^3\rho)}{3} = 0$$

$$r = 10, \rho = 0.638$$

$$d = 2, [1, 15]$$

Solve using bisection and false position.

(1) Bisection

$$F(d) = d^3 - 30d^2 + 2552$$

Workability Conditions:

F(x) is continuous

$$F(1) = 2523$$

$$F(15) = -823$$

Sign of F(a) != Sign of F(b)

F(x) has a unique root in [1, 15]

Convergence Rate:

$$n > \left\lceil \frac{\log(15 - 1) - \log(0.5 * 10^{-2})}{\log 2} \right\rceil - 1$$

$$n > 10.45$$

$$n = 11 \text{ iterations}$$

$$C_n = \frac{b_n + a_n}{2}$$

N	a_n +ve	b_n -ve	C_n	$F(C_n)$
0	1	15	8	1144
1	8	15	11.5	105.38
2	11.5	15	13.25	-388.67
3	11.5	13.25	12.38	-147.1
4	11.5	12.38	11.94	-21.98
5	11.5	11.94	11.72	41.45
6	11.72	11.94	11.83	9.13
7	11.83	11.94	11.89	-8.25
8	11.83	11.89	11.86	0.43
9	11.86	11.89	11.88	-5.36
10	11.86	11.88	11.87	-2.46
11	11.86	11.87	11.87	-2.46

Root in the interval [11.86, 11.87]

(2) False Position

$$C_n = b_n - \left[\frac{(F(b_n)(b_n - a_n))}{F(b_n) - F(a_n)} \right]$$

N	a_n	$F(a_n)$	b_n	$F(b_n)$	C_n	$F(C_n)$
0	1	2523	15	-823	11.57	84.87
1	11.57	85.87	15	-823	11.89	-8.25
2	11.59	79.02	11.89	-8.25	11.86	0.43
3	11.86	0.43	11.89	-8.25	11.86	

Root in the interval [11.86, 11.89].

Introduction to Newton Method

طیب المحاضره دى مش هنتشرح ال method دى بالظبط بس هنتعرف على شويه حاجات لازم
نبقى عارفينها قبل ما نبدأ فى ال method دى

Single and Multiple Root:

لو انا عندى function كده مثلاً:

$$x - 2 = 0$$

هلاقى ان ال root بتاع ال function هوا 2

طیب ولو ال function شکلها کده مثلا:

$$(x - 2)^2 = 0$$

ال root برضه هیبقی 2 بس هیبقی متکرر مرتین

$$(x - 2)(x - 2) = 0$$

$$x = 2, x = 2$$

معنی کده ان انا عدیت علی ال root ده مرتین

مثلا کده

$$(x - 1)^2(x - 3) = 0$$

$$x = 1, 1, 3$$

ای نعم ال 1 هوا ال 1 بس ده مش معناه انه root واحد هوا نفس ال root اه بس متکرر مرتین
عینی انا علی ال graph عدیت علیه مرتین

ال function الی یكون لیها root متکرر مرتین او اکثر کده بسمی ال root بتاعها multiple root
و لو زی اول مثال مله اش غیر واحد بس او لیها اکثر من واحد بس کل root بیتکرر مره واحده بس
ده کده بسمیه single or simple root

طیب ازای اعرف اذا کان ال root ده من order کام او بیتکرر کام مره یعنی

بسیطه خالص انا هعمل derivation لل function و اعوض بال root فی ال function وال
derivatives بتاعتها اول derivative هیطلع قیمه غیر ال zero یبقی کده ال root ده من ال
Order بتاعت درجه ال derivation دی

مثلا :

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$F'(x) = 2x - 4$$

$$F''(x) = 2$$

ال root هوا 2 نعوض بقی

$$F(2) = 4 - 8 + 4 = 0$$

$$F'(2) = 4 - 4 = 0$$

$$F''(2) = 2$$

کده اول derivation طلع قيمه غير ال zero هوا الثانى يبقى ال root ده بيتكرر مرتين
طيب مثلاً:

$$F(x) = (x^2 - 4x + 4)(x - 2)$$

$$F(x) = x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x + 4x - 8$$

$$F(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$F'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

$$F''(x) = 6x - 12$$

$$F'''(x) = 6$$

وال root هوا 2 و هنعوض

$$F(2) = 8 - 24 + 24 - 8 = 0$$

$$F'(2) = 12 - 24 + 12 = 0$$

$$F''(2) = 12 - 12 = 0$$

$$F'''(2) = 6$$

يبقى كده ال root ده بيتكرر 3 مرات

طيب فى المسائل اللى عندنا احنا اصلاً منعرفش ال root احنا عايزين نجيبه

طيب هنعرف ازاي ازاي كان simple or multiple ؟

بسيطة جدا لو ال $F'(x) \neq 0$ يبقى هي كده ☺ simple

$$F'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b] \text{ Single Root}$$

Convex and Concave Set:

if $F''(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ Then the Function is Convex

else if $F''(x) < 0$ Then the Function is Concave

هنعرف بعد كده ازاي نثبت انها applied على ال Points اللى فى ال interval

Quadratic Convergence:

$$\epsilon_k \leq L \epsilon_{k-1}^2$$

يعنى لو كان ال error فى كل مره بيكون اقل من التربيع بتاع ال error اللى قبله ساعتها بقول عليه quadratic

ال L دى constant بيتحدد على اساس المسأله يعنى

وده اسرع انواع ال convergence لان لو قلنا مثلا ان ال error دلوقتى = 0.5 يبقى ال error اللى بعده هوا اكيد اقل من $(0.5)^2$ و ميزه ال convergence ده انه بيقل بسرعه لانه quadratic و هنتكلم عنه اكتر لما ناخذ ال Newton ان شاء الله ☺

Linear Convergence:

و ده هوا نوع ال convergence اللى شوفناه لحد دلوقتى كله

$$\epsilon_k \leq m \epsilon_{k-1}$$

ان كل error بيكون اقل من اللى قبله ب factor معين بس

4- Newton Method

شوية معلومات كده قبل ما نبدأ

كنا قلنا فى المحاضره اللى فاتت ان فى حاجه اسمها simple and multiple root و كان فى حاجه ثانيه اسمها ال single root هنوضح بس الفرق بين ال simple & single معنى ان ال root يبقى simple :

$$F'(root) \neq 0$$

يعنى ال order بتاعو = 1

لكن single root يعنى مفيش غير root واحد بس فى ال interval

Any single root is a simple root but not vice versa.

نشوف بقى ال Newton method دى ☺

Workability Conditions

الشرط هنا بسيط جدا مطلوب بس ان $F(x)$ & $F'(x)$ & $F''(x)$ يكونوا continuous

$$F(x) \in C_{[a,b]}^{(2)}$$

السطر الى عدا ده هوا نفس الكلام اللى قلناه فى السطر اللى قبله مفيش اختلاف يعنى

طيب دلوقتى ايه هى فكره ال method دى بتشتغل ازاى يعنى

لو انا عندي function زي اللي في الرسمه دي مثلا:

اول حاجه هعملها هختار initial iteration point

هفترض مثلا اللي هي لونها اسود دي

هي ال p_0 اللي هبدأ من عندها

علشان اجيب ال iteration اللي بعديها بقى

هعمل خط من اول النقطه دي لحد ال function و بعدين اجيب ال slope لحد ما يتقاطع مع ال X axis و كده اكون ولصت لتانى نقطه اللي هي p_1

و هكذا بقى لو انا عند p_1 و عايزه اجيب

ال p_2 هاوصل خط من عند ال p_1 لحد

ال function و اجيب ال slope و اوصله لحد

ال X axis واشوف النقطه اللي بيتقاطعوا فيها تبقى هي دي ال p_2 next iteration اللي انا كنت عايزه اجيبها

طيب ازاى نكتب الكلام ده في شكل قانون

ال slope بتاع اى نقطه هوا عبارته عن ال first derivative عند النقطه دي

$$F'(x) = \frac{F(p_0) - 0}{p_0 - p_1}$$

هجيب ال p_1 لوحدها في طرف هيبقى:

$$p_1 = p_0 - \frac{F(p_0)}{F'(p_0)}$$

لما احط القانون ده بقى في شكل general علشان اجيب منه اى iteration هيبقى

$$p_n = p_{n-1} - \frac{F(p_{n-1})}{F'(p_{n-1})}$$

و دي هسميها ال Iteration Function ☺

طيب سؤال: امته مقدرش اجيب ال p_1 من ال p_0 ؟

لو كان ال slope عندها $= 0$, الحل ساعتها نغير ال p_0 نبدأ من مكان تانى يعنى

Convergence Test

فی عندنا شرطین اساسین علشان یحصل convergence بس ممکن یحصل ان شرط من الاتین دول یكون مش متحقق و علی حسب ال case الی انا فیها هحدد نوع ال convergence

هنشرح بقى کل case کده لوحدها و نشوف معناها ایه

Case 1:

1) $F'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ Simple root

2) Initial approximation is sufficiently close to the root

طیب اول حاجه نفهم ایه الشرطین دول

اول شرط زى ما احنا عارفين معنی ال simple root

طیب التانى بقى بیقول انه لازم ال initial iteration الی هبدأ من عندها تكون مشابه لل root فی 1 digit علی الاقل علشان اقدر اقول عنها انها close to the root

طیب وانا هعرف منین بقى هی close ولا مش close و الکلام ده ؟

هما بقى عملوا حسبه کده وصلوا منها ان:

if $\gamma < 1$ then it's close

else if $\gamma > 1$ then it's not close

طیب مفیث مانع بس اجیب منین ال Gamma دى ؟

القانون الی هتسبها منه هوا:

$$\gamma = \frac{M}{2m} * \delta$$

طیب مین δ , m , M دول برضوه؟

بسیطه جدا

ال M دى عبارته عن ان انا هجیب ال $F''(x)$ و اعوض فیها بحدود ال Interval و اخذ ال absolute value و الی یطلع اکبر بیقى هوا ال M

$$\text{Max} (|F''(a)|, |F''(b)|)$$

ال m بقى هجیب ال $F'(x)$ و اعوض فیها برضوه بحدود ال Interval بس المره دى هختار الاصغر

$$\text{Min} (|F'(a)|, |F'(b)|)$$

بالنسبة لل δ بقى هحسبها بالقانون ده

$$\delta = \frac{b-a}{2}$$

بس كده احسب ال Gamma بقى لو طلعت اقل من الواحد يبقى تمام كده ال initial iteration close to the root

لو العكس يبقى مش close to the root

طيب فى الحالة دى بقى هيحصل Quadratic Convergence اللى اتكلمنا عنه المحاضره اللى فاتت

ودى تعتبر احسن حاله من Newton

ال Case دى هى الوحيدة اللى ليها قانون لحساب عدد ال iterations الى هوا:

$$N \geq \frac{1}{\log 2} \left[\log \left[\frac{\log U^{-1} + \log \frac{2m}{M}}{\log \gamma^{-1}} \right] \right]$$

$$U = 0.5 * 10^{-d}$$

بسيطه يعنى ☺

طيب نشوف بقى باقى ال cases اللى ممكن تحصل لو فى شرط من الشرطين اللى قلنا عليهم متحققش

Case 2:

1) Multiple Root (Condition # 1 Failed)

2) $\gamma < 1$

هنا الشرط الاولانى متحققش فا كده هيحصل convergence بس هيبقى linear

Case 3:

1) Simple Root

2) $\gamma > 1$

هنا بقى الشرط الثانى هوا اللى متحققش

فى الحالة دى لازم ازود شرط تالت لازم يكون متحقق علشان اقول ان فى convergence

والشرط ده ان ال $F(x)$ تكون convex or concave

لو حصل ان ال 3 شروط دول اتحققوا يبقى فى convergence نوعه Linear-Quadratic

طیب یعنی ایه Linear-Quadratic دی؟

معناها انه بيمشى عدد معين من ال iterations ب linear convergence لحد ما يوصل لرقم قريب من ال root و مشابه ليه فى 1 digit و من بعدها بقى هيمشى على انه Quadratic

Case 4:

1) Multiple Root

2) $\gamma > 1$

3) $F(x)$ is Convex or Concave

لو حصل بقى ان الشرطين متحققوش ؟

هيحصل برضوه convergence بس هيبقى Linear

Important Notes:

- اولاً الشرط العام فى Newton Method علشان اى Function تبقى convergent هى انها تكون convex or concave
- لو حصل ان الشرط ده متحققش ده مش معناها انها مش convergent لازم اتأكد الاول من ال Gamma لو طلعت اقل من ال 1 يبقى هى كده Convergent
- الحالة اللى هتعمل فيها diverge هى ان ال Function تكون مش convex or concave و ان ال Gamma تكون اكبر من الواحد
- لما تكون ال function بتعمل convergent معنى كده انها convex or concave و فى الحالة دى يكون اسمه global convergence يعنى ال iterations ممكن تطلع بره ال Interval و تدخل تانى عادى يعنى بس بقى لما احدد ال Gamma ساعتها هعرف هى هتفضل global ولا هتبقى local و طبعا لو ال Gamma اقل من 1 هتبقى local

Illustration for the Linear-Quadratic Convergence:

هنشوف مثال بسيط كده هنوضح بيه حاجه يعنى

فلنفترض ان انا عندي function معينه و كانت بتحقق case 3 و المفروض بقى اجيب ال root بناعتها و جيت اعمل الجدول طلع بالشكل ده:

K	X	# Correct Digits
0	10	0
1	9.0000908	0
2	8.000378	0
3	7.0010083	0
4	6.0028302	0
5	5.0077737	0
6	4.0211542	0
7	3.05701	0
8	2.1510662	0
9	1.3837863	0
10	0.8850416	0
11	0.7104953	0
12	0.693956	1
13	0.6931471	3
14	0.6931472	7

الجزء الى بالاسود ده طبعا واضح انه كان ماشى linear بس اول ما طلع او digit متشابه مع ال exact root بدأ يمشى quadratic و خالص فى 3 iterations اهو

طيب فى ال linear convergence فى حاجات احسن من حاجات

يعنى لو جيت قلت مثلا مين احسن:

$$\epsilon_k \leq \frac{1}{2} \epsilon_{k-1}$$

OR

$$\epsilon_k \leq \frac{1}{4} \epsilon_{k-1}$$

طبيعى التانيه احسن لانها بتقلل نسبة ال error فى كل iteration بمقدار اكبر من الاولانيه و بالتالى هتوصل اسرع

طيب لو افترضنا ان فى method تكون Linearly احسن من ال Newton مش لو استخدمتها لحد ما اوصل لاول digit متشابه مع ال root و بعدين كملت بال Newton مش كده هيبقى اسرع ؟

يعنى لو فى مسأله ال Newton هياخد فيها 11 خطوه Linear و 3 خطوات quadratic طيب ما انا اشوف method تعمل ال 11 خطوه ال linear دول فى 7 مثلا و بعدين اخد ال iteration اللى وصلت عندها و اكمل بيها فى Newton و كده همشى quadratic فا هخلص بسرعه طيب ممكن اعمل كده ازاي؟

هستخدم ال bisection method

اولا لانها Linearly احسن من ال Newton ولان قانون حساب ال iteration بتاعها سهل

طيب علشان اعمل كده اولاً لازم اتأكد انها workable و الكلام ده يعنى عادى

طيب ازاي هعرف عدد ال iterations اللى همشيتها فى ال bisection علشان اوصل ل root approximated up to 1 digit علشان اعوض بيه فى ال Newton علشان يمشى quadratic ؟

هستخدم القانون ده:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < 0.5 * 10^{-1}$$

و اطلع ال N و امشى على عددها و اخد اخر رقم و ابدأ اشتغل بيه فى ال Newton

طيب انا هطبق الكلام ده على المثال اللى شوفناه فوق ده علشان نشوف هياخد كام iteration كده

$$n = 7$$

K	a_i	b_i	c_i
0			5
1			2.5
2			1.25
3			0.625
4			0.9375
5			0.78125
6			...
7	0.635	0.9375	0.6640625

هنا انا المفروض عملت 7 iterations زي ما طلع من القانون و هأخذ بقى اخر ناتج ده و امشى عليه Newton

K	p_i	# correct Digits
0	0.6640625	1
1	0.6935742	3
2	0.6931472	6

طبعا ملاحظين الفرق فى عدد ال iterations لما استخدمت Newton بس ولما استخدمت Bisection فى ال Linear part ☺

طيب سؤال مهم بقى

لو انا عايزه احسب عدد ال iterations اللى هعملها فى Newton بعد ما اخلص ال Bisection بقى هجيها ازاي؟

هى كده خلاص بقت تتبع Case 1 فا بالتالى اقدر اطبق عليها قانون ال N الكبير اللى فوق ده

بس هنا بقى لازم اخلى بالى ان ال interval اتغيرت لان ال Bisection بتغير ال Interval فا لما اجى اعوض فيه هعوض مكان ال $[a, b]$ بأخر interval طلعت من ال bisection اللى هى لونها ازرق فى الجدول دى ☺

انا بقول بقى نحل مسأله على ال Newton

Ex:

Consider the problem of finding the zeroes of:

$$F(x) = \frac{1}{x} + \ln x - 2$$

This function is defined $\forall +ve x$ and has two zeroes, one between

($x = 0$ and $x = 1$) and the other between ($x = 6$ and $x = 7$)

- Are Newton iterates convergent in both intervals? Why?
- If you decided that Newton's iterative algorithm is convergence on both intervals, determine the type of convergence?
- Determine the roots up to 7 decimal digits?

Solution

1-

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

$$F''(x) = \frac{2-x}{x^3}$$

On $(0,1)$ $F''(x) > 0$ then $F(x)$ is convex so Newton converge

ده معناه ان اى قيمه فى الفتره من 0 ل 1 لو عوضت بيها فى $F''(x)$ مش ممكن تطلع قيمه اقل من ال 0 لان البسط عبارته عن $2-x$ و بالتالى انا محتاجه رقم اكبر من 2 علشان يطلع رقم اقل من 0

On $(6,7)$ $F''(x) < 0$ then $F(x)$ is concave so Newton converge

نفس الكلام لو عوضنا بأى قيمه من 6 ل 7 فى $F''(x)$ دايمًا هيبقى اقل من 0

2-

$$(0,1) = [0.01, 0.99]$$

هنا عملنا كده علشان ال 0 و ال 1 مش معانا فا هناخد اقرب قيمه ليهم علشان لما نيجى نعوض يعنى

دلوقتى مطلوب اعرف نوع ال convergence و هوا اصلا قالى انها مفيش فيها غير root واحد بالتالى هيبقى simple root و كده اول شرط متحقق

ناقص بقى اعرف ال Gamma علشان اقدر احدد نوعها

$$F'(0.99) = 0.010203 = m$$

$$F''(x) < M, F''(0.01) = 1990000$$

$$\delta = \frac{(b-a)}{2} = \frac{0.99-0.01}{2} = 0.49$$

$$\gamma = 477.849 \gg 1$$

هنا ال Gamma واضح انها اكبر من الواحد بكتييير بالتالى كده انا بقيت فى Case 3

Linear Quadratic Convergent ☺

Ex:

$$F(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

Workability Conditions:

$$F'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$F''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

Both $F'(x)$ and $F''(x)$ are not continuous so this equation can't be solved using Newton Method.

Ex:

$$F(x) = (x - 2)^4, [0, 3], \quad p_0 = 2.1$$

Find p_1, p_2, p_3, p_4

$$F'(x) = 4(x - 2)^3$$

$$F''(x) = 12(x - 2)^2$$

Workable Function

Convergence Test:

$$F'(x) = 0 \text{ when } x = 2 \text{ and } 2 \in [0, 3]$$

So the function has multiple roots

Finding Gamma

$$F'(0) = -32, F'(3) = 4$$

$$m = 4$$

$$F''(0) = 48, F''(3) = 12 \geq 0 \text{ Convex}$$

$$M = 48$$

$$\sigma = \frac{3 - 0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\gamma = \frac{48}{8} * \frac{3}{2} = 9 > 1$$

Then this is case 4 Linear Convergence

N	P _N
0	2.1
1	2.075
2	2.056
3	2.042
4	2.032

Ex:

$$F(x) = x e^{-x}, (-1, 1)$$

$$p_0 = 0.2$$

Find p_1, p_2, p_3, p_4

$$F'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$$

$$F''(x) = x e^{-x} - 2 e^{-x}$$

$$F'(1) = 0$$

علشان المشكله دى انا هصغر ال interval حاجه بسيطه بس علشان نعرف نحل

$$[-0.99, 0.99]$$

$$F'(x) \neq 0 \forall x \in [-0.99, 0.99]$$

So we have a simple root.

Finding Gamma

$$M = F''(-0.99) = 8.04679$$

$$m = F'(0.99) = 0.00372$$

$$\sigma = \frac{0.99 + 0.99}{2} = 0.99$$

$$\gamma = 1081.56 > 1$$

So this is case 3:- Linear – Quadratic Convergence

N	P_N
0	0.2
1	0.05001
2	0.00239
3	0.0001
4	0.00000

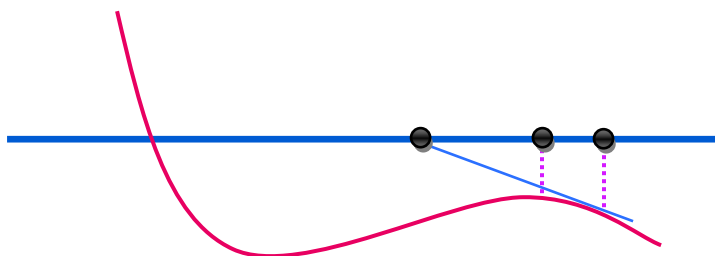
5- Secant Method

الطريقة دي بالظبط نفس كل الكلام اللي قلناه في Newton مجرد بتختلف في حاجه واحده بس اللي هي ال Iterating function

هما لقوا ان ال Iterating function بتاعت Newton ممكن تكون صعبه لل Functions اللي منقدرش نجيب ال Derivative بتاعها بسهولة فا قالوا هيغيروا الموضوع ده و يعملوا Iterating function من غير ما يستخدموا ال Derivative

الفكره في الطريقة دي ان انا ببدا ب Two Initial Iterations مش واحده بس زي Newton و من النقطتين دول بوصل بينهم بخط لحد ال X axis و الناتج هيكون هوا ال Iteration اللي بعديها

شكل ال Iterative Function بيكون كده:



$$P_n = P_{n-1} - \left[\frac{F(P_{n-1})(P_{n-1} - P_{n-2})}{F(P_{n-1}) - F(P_{n-2})} \right]$$

Ex:

Determine if the following function could be solved using secant method

$$F(x) = \frac{x^2 + 2.3}{4}$$

$$d = 4, [2.5, 4]$$

$$F'(x) = \frac{x}{2}, F''(x) = \frac{1}{2}$$

$$F''(x) \geq 0 \forall x \in [2.5, 4]$$

Then the function is convex and it has global convergence.

Ex:

$$F(x) = x^2 - 2x - 1$$

$$\text{interval } [0, 3], p_0 = 2.6, p_1 = 2.5$$

Find p_2, p_3 ?

Checking Workability

$$F'(x) = 2x - 2$$

$$F''(x) = 2$$

All are continuous functions on the interval $[0, 3]$.

Checking convergence

$$F''(x) > 0 \forall x \in [0, 3]$$

So it's a convex function implies Convergence ☺

Finding iterations

$$p_2 = p_1 - \frac{F(p_1)(p_1 - p_0)}{F(p_1) - F(p_0)}$$

$$p_2 = 2.41935$$

$$p_3 = 2.4144$$

Interpolation

دى بقى حاجه جديده ☺

لو افترضنا مثلا ان انا بعمل تجربه حاجه كده زى الى كنا بنعملها فى ال physics lab والحاجات دى

مش كنا مثلا بنعد نعمل التجربة اكثر من مره و نسجل النواتج و نرسم ال function فى الاخر و متطلعش صح برضو ☺

احنا بقى عايزين نطلعها صح دلوقتي D:

طيب المهم احنا معانا نواتج و هنفترض ان النواتج دى accurate و مضبوطه جدا

مثلا مثلا لو انا عندى circuit و كل مره بغير ال voltage و احسب ال I اللى هى التيار الكهربائى

وطلع شكل ال points بعد ما رسمتها كده مثلا

طيب انا حسبت النتائج لما دخلت input 1 و 2 و 3 و 4 و 5

طيب و لو افترضنا ان انا عايزه اجيب النتيجة لما

ادخل input 1.5 مثلا هعمل ايه؟

اكيد لازم هعمل تجربه من تانى !!

طيب ما كده مينفعش, الاحسن ان احنا نرسم

شكل ال function و نطلع منه كل ال Points اللى احنا عايزنها

طيب جميل تعالوا نرسمها بقى ☺

كده بقى شكلها احلى

طيب انا بقى عايزه احط الشكل ده فى معادله

علشان اعوض فيها على طول بأى قيمه تطلعلى

النتيجه اللى انا عايزها من غير ما اعمل تجربه

كلها من تانى.

لقوا ان ممكن الناس تختلف فى شكل ال function

وكل واحد ممكن يوصل بين النقط بطريقه مختلفه و كلهم بيقوا صح, طيب اومال امته بيقى مفيش غير حل واحد بس و اللى يطلع غيره بيقى غلطان؟

قالوا ان لو انا عندي عدد ال Points اللى معايا اللى هجيب بيهم ال Function بيساوى N يبقى انا لازم اطلع لها ال function ال Order بتاعها بيساوى N-1

يعنى لو هوا فى المسأله قالى معاكى 5 points اهم و طلعى منهم Function بتحققهم كلهم يعنى بتعدى عليهم كلهم كده انا لازم اجيبه معادله من الدرجة الرابعه يعنى توصل لحد x^4 و كده مش هيبقى فى غير حل واحد من الدرجة الرابعه بالتالى مش هنختلف عليه ☺

1- Lagrange Method

هنشوف بقى القانون و نشوف هنتسخدمه ازاي و بعدين هنحل مثال علشان الصوره توضح

HINT:

$$f_0 == y_0$$

means that $(x_0, y_0) == (x_0, f_0)$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f_i = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + \dots + L_n(x) f_n$$

$L_i(x) \rightarrow$ Called Lagrange Coefficient

طيب لحد دلوقتي هوا قال ان ال function هتبقى عبارته عن شويه حاجات مجموعه على بعضها

طيب احنا عرفنا ان $f_0, f_1, \dots, f_n$ هيا ال y بتاعت ال Points اللى عندنا

ايه بقى ال Lagrange Coefficient ده؟ و نحسبه ازاي؟

القانون بتاعه بيقول

$$L_i(x) = \prod_{j=0 \text{ \& } i \neq j}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

ال operator ده يعنى حاصل ضرب

طيب نفهم بقى ازاي نفك ال term ده

اولا ال x اللى فى البسط دي variable يعنى بتكتب x زي ما هيا اما ال z بقى فا هيا زي counter من 0 لحد n و بعوض فى القانون ده بكل z , 1 الا لو $z = 1$ ساعتها مكتبش ال term

دّة

طیب مفیش حاجه فهمه طبعاً

طیب نشوف ازای نفکه عموماً و بعدین نجرب مثال

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x, x_{i-1})(x, x_{i+1}) \dots (x, x_n)}{(x_i, x_0)(x_i, x_1)(x_i, x_2) \dots (x_i, x_{i-1})(x_i, x_{i+1}) \dots (x_i, x_n)}$$

خلی بالكوا ان انا مکتبتش ال term اللی کان فیه ال $z = i$ و حاجه کمان البسط هوا نفس المقام بالظبط بس مکان ال x هنعط x_i بس کده

طیب لو انا عایزه اجیب $L_0(x)$ مثلاً هتبقی کده

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x, x_n)}{(x_i, x_1)(x_i, x_2) \dots (x_i, x_n)}$$

محطیناش ای term موجود فیه x_0 اهو علشان لو حطیته هیطلع 0 فا منطقی منحهوش ☺

طیب نجرب واحده کمان

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x, x_n)}{(x_i, x_0)(x_i, x_2) \dots (x_i, x_n)}$$

برضوه نفس الکلام

طیب ناخذ مثال بأرقام بقی

Ex:

Given the points $(-1, 4), (0, 1), (1, 0)$ find $F(x)$ using Lagrange method?

اولاً هکتب اصلاً المفروض ال Function فی الآخر شکلها یکون ازای

$$p_2(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2$$

$$f_0 = 4, f_1 = 1, f_2 = 0$$

و بما ان $f_2 = 0$ بیقی مش لازم احسب ال $L_2(x)$ ☺

نبدأ نحسب الباقي بقی

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

هعوض بقی عن $x_1 = 0, x_2 = 1, x_0 = -1$ زی ما هما موجودین فی السؤال یعنی

$$L_0(x) = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_1(x) = L_0(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$= \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = -(x^2 - 1)$$

نعوض بقى فى ال function

$$F_2(x) = 2(x^2 - x) - (x^2 - 1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

2- Newton Method

Case1: Equal Spaced "Forward Difference"

اولا يعنى ايه equal spaced يعنى لو انا عندى points بالشكل كده مثلا

$$(1, 2), (2, 4), (3, -1), (4, 0)$$

هلاقى ان الفرق بين كل x و اللى بعديها ثابت

فى المثال ده كان الفرق بينهم دايما 1 مثلا

الفرق ده هرمرز له بالرمز h بعد كده

طيب ايه المشكله اللى كانت فى Lagrange علشان يفكروا فى طريقه ثانيه؟

المشكله ان انا لو حسبت ال function باستخدام 3 points مثلا و بعدين غيرت رأيى و قلت عايزه ازود Point كمان او اشيل point حسبته اصلا لازم اعيد كل الحسابات من الاول

بس Newton Method بقى حلت المشكله دى

بقت لما احب ازود point بحط term جديد و لو عايز اشيل Point موجوده بشيل term حسبته قبل كده

يعنى بقت independent عن بعضها

نشوف بقى شكل ال function هنا و ازاي بحلها

$$P_n(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2! h^2} \Delta^2 f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3! h^3} \Delta^3 f_0 + \dots$$

طيب كل حاجه هنا معروفه بس ايه بقى ال Δf_0 ده ؟

ده حاجه اسمها Newton Coefficient و هنعرف ازاي بنحسبه

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

in general $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$

طیب و بالنسبه للتربيع و التكعيب و الحاجات دى؟

دى ليها قانون بعوض فيه علشان اجيبها اللى هوا

$$\Delta^n f_0 = f_n - \binom{n}{1} f_{n-1} + \binom{n}{2} f_{n-2} - \binom{n}{3} f_{n-3} + \dots + (-1)^n f_0$$

طیب بغض النظر عن كل القوانين دى احنا مش هنستخدمها فى حاجه لان فى طريقه ابسط من كده اقدر اجيب بيها ال $\Delta f_0, \Delta^n f_0$ طیب ازاي ؟

هنشوف بقى و احنا بنحل المسأله علشان تبقى واضحه اكثر

Ex:

Given the points $(-1, 4), (0, 1), (1, 0)$ find $F(x)$ using Newton method?

اولا نشوف ال function

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2! h^2} \Delta^2 f_0 \\ &= 4 + (x + 1) \Delta f_0 + \frac{(x + 1)x}{2} \Delta^2 f_0 \end{aligned}$$

علشان نجيب ال $\Delta f_0, \Delta^n f_0$ بقى هنعمل ايه؟

اولا هكتب كل ال $f_0, f_1, \dots$ اللى موجودين فى السؤال

$$f_0 = 4, f_1 = 1, f_2 = 0$$

وبعدين هطرح كل واحده من اللى قبلها

$$f_0 = 4, f_1 = 1, f_2 = 0$$

$$\Delta f_0 = -3, \Delta f_1 = -1$$

و بعدين هطرح برضوه كل واحده من اللى قبلها

$$f_0 = 4, f_1 = 1, f_2 = 0$$

$$\Delta f_0 = -3, \Delta f_1 = -1$$

$$\Delta^2 f_0 = 2$$

بس كده و دايمًا بقى هاخذ اللى على الشمال

اعوض بقى فى ال function

$$\begin{aligned}P_2(x) &= 4 - 3(x + 1) + (x + 1)x \\&= x^2 - 2x + 1\end{aligned}$$

بس كده ☺

Important Note:

In Lagrange method all the “x” coordinates of the points must be different.

Ex:

Given the points $(-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 8)$ find the equation?

We have 4 points so we need to find a cubic equation ☺

$$\begin{aligned}p_{3(x)} &= L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3 \\L_0(x) &= \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 1)(-1 - 2)} = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\end{aligned}$$

We don't have to calculate $L_1(x)$ because it will be multiplied by zero.

$$\begin{aligned}L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(1 + 1)(1 - 0)(1 - 2)} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{-2} \\L_3(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(2 + 1)(2 - 0)(2 - 1)} = \frac{x^3 - x}{6} \\P_3(x) &= x^3\end{aligned}$$

Ex:

Given the points $(0, 0), (1, 4), (2, 4)$ find the equation? Then find $F(1.5)$?

We should find the quadratic equation ☺

$$\begin{aligned}P_2(x) &= f_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2! h^2} \Delta^2 f_0 \\ \Delta f_0 &= f_1 - f_0 = 4 - 0 = 4\end{aligned}$$

$$\Delta f_1 = f_2 - f_1 = 4 - 4 = 0$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = 0 - 4 = -4$$

$$P_2(x) = 0 + \frac{x-0}{1}(4) + \frac{(x-0)(x-1)}{2}(-4)$$

$$P_2(x) = -2x^2 + 6x$$

$$F(1.5) = 4.5$$

Important Notes

****** احنا قلنا فى الاول خالص انه علشان اجيب معادله بتمر بعدد N من النقط لازم تكون معادلة من الدرجة

N-1 علشان اضمن ان الحل يكون unique

طبعا اقدر اجيب معادله من اى درجة اكبر من او بتساوى N بس فى الحاله دى هيبقى عندى عدد لا نهائى من الحلول

تخيلوا كده لو فى عندنا نقطتين و عايزه اعملهم Interpolation بس عايزاه من الدرجة التانيه على عدد النقط فا لما احط نقطتين و احاول اوصل بينهم ب Quadratic Function هيطلع عدد لا نهائى من الحلول

علشان كده احنا قلنا لازم المعادله تبقى من الدرجة N-1 اللى هى عدد النقط - 1

****** طيب فى شرط مهم اوى لازم اخلى بالى منه فى كل الطرق يعنى وانا بعمل interpolation عموما ان لازم ال points نفسها ميقاش فى 2 points على خط رأسى واحد بمعنى انه مينفعش يبقى فى نقطتين ليهم نفس ال X coordinates يعنى مينفعش يبقى عندى مثلا (1, -1), (1, 3) كده ال x هى نفسها فى النقطتين و ده كده هيطلع infinite solution .

طيب عظيم جدا 😊 نشوف بقى باقى الطرق بتاعت ال Interpolation و عموما هما كلهم مش فيهم حاجات جديده اوى .

Case: 2 Not Equal Spaced "Divided Difference"

فى طريقه Newton دى كان فى حالتين , اتكلمنا عن حاله الاولى المحاضره اللى قبل دى الى هى قلنا فيها ان الفرق بين ال $x_0, x_1, x_2, \dots$ بيكون ثابت

الحاله دى بقى لما الفرق يكون مش ثابت بينهم و طبعا الحاله دى هى ال more general يعنى ممكن احل ب Newton بالقانون بتاع دى سواء الفرق واحد او مختلف

طيب شكل ال function فى الحاله دى بيكون كده:

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0)Df_0 + (x - x_0)(x - x_1)D^2f_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)D^3f_0 + \dots$$

طيب احنا عارفين كل الحاجات دى ماعدا ال $Df_0, D^2f_0, \dots$ ايه بقى الكلام ده و نحسبه ازاي؟

القانون العام بيقول :

$$D^j f_i = \frac{D^{j-1} f_{i+1} - D^{j-1} f_i}{x_{i+j} - x_i}$$

طبعا انا متخيلش حد ممكن يعوض فى قانون زى ده ☺ فا اكيد اكيد فى طريقه احسن من كده
والحمد لله ان فى طريقه فعلا بس هنشوفها و احنا بنحل مثال بأرقام بقى و كده علشان نحس
بالموقف ☺

Ex:

Given the data $(1, 5), (3, 1), (4, 0.5), (4.5, 0.3625)$ interpolate the value of $f(2.5)$ using the Newton interpolation method?

طيب جميل احنا عندنا كام نقطه ؟ 4 ☺ يبقى عايزين معادله من الدرجة الثالثه

طيب نكتب القانون كده

$$P_3(x) = f_0 + (x - x_0)Df_0 + (x - x_0)(x - x_1)D^2f_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)D^3f_0$$

نعوض بقى بالقيم اللى احنا عارفينها من ال points الى فى السؤال

$$P_3(x) = 5 + (x - 1)Df_0 + (x - 1)(x - 3)D^2f_0 + (x - 1)(x - 3)(x - 4)D^3f_0$$

تمام مش ناقص بقى غير اننا نجيب الحاجات اللى فيها D دى ☺

اول حاجه هعمل جدول هخط فيه ال Points بالشكل ده

X_n	$x_0 = 1$	$x_1 = 3$	$x_2 = 4$	$x_3 = 4.5$
F_n	$f_0 = 5$	$f_1 = 1$	$f_2 = 0.5$	$f_3 = 0.3625$
D				
D^2				
D^3				

كده انا مش عملت اكثر من انى حطيت ال points تحت بعض كده

طيب انا يهمن دلوقتى احسب او column اللى هو بتاع Df_0, D^2f_0, D^3f_0 لان هما دول اللى محتاجه اعرف قيمهم

نحسبهم ازاي بقى ☺

بصوا هي القيمة اللى بحسبها في اي مكان في الجدول ده عبارة عن بسط و مقام

البسط عبارة عن طرح رقمين و المقام برضوه عبارة عن طرح رقمين

المهم دلوقتى اعرف مين هما الرقمين في كل حاجه ؟

البسط دايمًا عبارة عن اللى جنب اللى فوقى - اللى فوقى على طول

قلش طبعًا ☺ طيب نجرب مثال كده لو انا مثلاً عايزه احسب اول مكان فاضى ده اللى هو بتاع

Df_0 هقول القيمة عبارة عن بسط = اللى جنب اللى فوقى اللى هو كام ؟ اللى هو الواحد

طيب اطرح منه بقى اللى فوقى على طول اللى هو ال 5 تمام كده ؟

طيب المقام بقى ؟

المقام بقى بيبقى دايمًا بطرح x من بعضها مش ببص خالص مين اللى فوق و مين اللى تحت

هو دايمًا ببص على اول row في الجدول

في اول مره هاخذ الاثنين اللى فوقى على طول

تاني مره يعنى عند ال D^2 هوسع المجال شويه بدل ما اخذ اللى فوقى و اللى جنبه هاخذ اللى

فوقى و اسيب اللى جنبه و اروح للى بعده

تالت مره عند ال D^3 هاخذ اللى فوق و اطرحه من تالت واحد بعده يعنى هسيب 2 في النص

و هكذا بقى, طيب نكمل الجدول اللى فوق ده و نشوف هيمشى ازاي

X_n	$x_0 = 1$	$x_1 = 3$	$x_2 = 4$	$x_3 = 4.5$
F_n	$f_0 = 5$	$f_1 = 1$	$f_2 = 0.5$	$f_3 = 0.3625$
D	$Df_0 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ $= \frac{1 - 5}{3 - 1} = -2$	$Df_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$ $= \frac{0.5 - 1}{4 - 3} = -0.5$	$Df_2 = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}$ $= \frac{0.3625 - 0.5}{4.5 - 4} = -0.275$	
D^2	$D^2f_0 = \frac{-0.5 + 2}{4 - 1}$ $= 0.5$	$D^2f_1 = \frac{-0.275 + 0.5}{4.5 - 3}$ $= 0.15$		
D^3	$D^3f_0 = \frac{0.15 - 0.5}{4.5 - 1}$ $= -0.1$			

طيب كده تمام عملنا الجدول هاخذ منه القيم اللى انا عايزاها و اعوض بيها فى المعادله و اطلع الشكل النهائى ليها

$$P_3(x) = 5 - 2(x - 1) + 0.5(x - 1)(x - 3) - 0.1(x - 1)(x - 3)(x - 4)$$

ونعوض بقى بالقيمه اللى كنا عايزين نطلعها اللى طالباها فى السؤال

$$P_3(2.5) = 5 - 2(2.5 - 1) + 0.5(2.5 - 1)(2.5 - 3) - 0.1(2.5 - 1)(2.5 - 3)(2.5 - 4) = 1.5125$$

وبس كده ☺

Ex:

Given the data point

(0,0), (2,4), (3,3), (5,1.25)

Find the polynomial function and find $f(1.3)$?

	$x_0 = 0$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 5$
D	$f_0 = 0$ $\frac{4}{2} = 2$	$f_1 = 4$ $\frac{3-4}{3-2} = -1$	$f_2 = 3$ $\frac{1.25-3}{5-3} = -0.875$	$f_3 = 1.25$ x_{i+1}, x_i
D^2	$\frac{-1-2}{3-0} = -1$	$\frac{-0.875+1}{5-2} = 0.0417$		x_{i+2}, x_i
D^3	$\frac{0.0471+1}{5-0} = 0.2083$			x_{i+3}, x_i

$$P_3(x) = f_0 + (x - x_0)Df_0 + (x - x_0)(x - x_1)D^2f_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)D^3f_0$$

$$P_3(x) = 0 + (x - 0)(2) + (x - 0)(x - 2)(-1) + (x - 0)(x - 2)(x - 3)(0.2083)$$

$$P_3(x) = 0.2083x^3 - 2.0415x^2 + 5.2498x$$

$$P_3(1.3) = 3.8322$$

3- Piecewise Method

الطريقة دي بقى مغيث فيها جديد نهائى هى بس بتحل مشكله ان لو عندنا عدد كبير من ال Points مثلا 7 او 8 فا طبعا علشان اجيب معادله من الدرجة ال 6 او 7 بطريقة Lagrange or Newton منظر التعويض هيبقى وحش جدا يعنى ☺

فا الطريقة دي بتقول ايه بقى ؟

بتقول انتا تاخذ ال points دي و تقسمها كل حبه مع بعض (هنعرف على اساس ايه دلوقتى) وبعدين تجيب ال polynomial بتاعت كل مجموعه لوحدها ب Lagrange or Newton

اهم حاجه ان ال Data تبقى Equal Spaced

طيب فى عندنا منها 3 انواع

LINEAR, QUADRATIC, CUBIC

الفرق بيبقى فى عدد النقط اللى باخذها, ما علينا نفهم واحده واحد احسن

Linear Piecewise

اولا علشان اجيب معادله linear انا محتاجه نقطتين فا بالتالى لو عندى 6 نقط هقسمهم كل اثنين مع بعض

{1 }2{ }3{ }4{ }5{ }6}

طيب لو انا خدت ال 2 مره فى الفتره [1, 2] ليه اخدها تانى فى الفتره [2, 3] ؟

علشان اضمن ال continuity بتاعت ال function اللى هجيبها

طيب بعد ما اطلع المعادله بتاعت كل فتره باستخدام Lagrange or Newton هعمل ايه ؟

لو افترضنا ان ال functions اللى طلعت هى مثلا $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x), q_5(x)$

هحط انا بقى شكل ال Function النهائى كده

$$g(x) = \begin{cases} q_1(x), & 1 \leq x \leq 2 \\ q_2(x), & 2 \leq x \leq 3 \\ q_3(x), & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} q_4(x), & 4 \leq x \leq 5 \\ q_5(x), & 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

وكده لما يجى يقولى انا عايز قيمه ال function دى عند اى value هشوف ال value دى موجوده فى انهى Interval و اعوض فى ال function بتاعتها

Quadratic Piecewise

نفس الكلام بالظبط بس مكان ما هاخذ نقطتين هاخذ 3 لان انا عايزه معادله من الدرجة التانيه

طيب لو خدنا نفس المثال هلاقى ان انا هاخذ ال Intervals كده:

[1,3], [3,5], [4,6]

يعنى ممكن اعمل Overlap عادى مش مشكله لان هنا اتبقى عندى ال [5,6] Interval فى الاخر و انا عايزه ال function تبقي من الدرجة التانيه فا ممكن اخذ من اول ال 4 لحد ال 6 مش مشكله

لكن بقى لو مش مطلوب ان كل ال functions تبقي quadratic فا ممكن اخذ [5,6] و اعملها linear عادى جدا ☺

Cubic Piecewise

برضوه هقسم ال Interval ل Intervals صغيره و اجيب المعادله بتاعت كل واحده فيهم

بس هاخذ كل 4 نقط مع بعض علشان اجيب معادله من الدرجه التالته

وبرضوه ممكن اعمال Overlap.

نشوف مثال و نشوف ازاي نحل بالطريقه دى

Ex:

Determine the Piecewise quadratic polynomial interpolating the data:

X	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1
F	1	3	2	1	0	2	1

اول حاجه نتأكد ان ال Data Equal Spaced هلاقى انهم فعلا Equal spaced والفرق بينهم $\frac{1}{6}$

بما انه عايزها quadratic فا هقسم ال Interval $[0, 1]$ ل intervals صغيره كل واحده فيها 3 نقط

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

وهمسك كل interval من دول و احسب ال Polynomial بتاعتهم و فى المسأله دى هستخدم Lagrange بس اى Method عموما هتطلع نفس الناتج

الحل بقى هكتبه على طول لان المفروض اننا فاهمين ازاي نحل ب Lagrange يعنى ☺

$$\left[0, \frac{1}{3}\right]$$

$$P_2(x) = g_1(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(0 - \frac{1}{6}\right)\left(0 - \frac{1}{3}\right)}(1) + \frac{(x - 0)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{6} - 0\right)\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)}(3) + \frac{(x - 0)\left(x - \frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{3} - 0\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)}(2)$$

$$g_1(x) = -54x^2 + 21x + 1$$

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

$$P_2(x) = g_2(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)}(2) + \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)}(1) + \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)}(0)$$

$$g_2(x) = -6x + 4$$

$$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$P_2(x) = g_3(x) = \frac{\left(x - \frac{5}{6}\right)(x - 1)}{\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{2}{3} - 1\right)}(0) + \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1)}{\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{6} - 1\right)}(2) + \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right)}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{5}{6}\right)}(1)$$

$$g_3(x) = -54x^2 + 93x - 38$$

ويعتبر كده الحل النهائي هو

$$G(x) = \begin{cases} -54x^2 + 21x + 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ -6x + 4, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -54x^2 + 93x - 38, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

فكره الطريقه دي ان لو ال interval كبيره فا ممكن اقسّمها ل intervals صغيره و اطلع الحل في كل Interval لوحدها

Ex:

$$(-1, 1.5), (0, 3), (1, 6), (2, 12), (3, 24)$$

Interpolate value of $f(1.5)$ using cubic piecewise?

اولا لازم ال points تبقى equal spaced و بما انه طالب cubic يبقى انا هقسم كل 4 نقط مع بعض بس كده هيتبقى نقطه لوحدها في الاخر فا مش مشكله هاخد لها 3 من اللى قبلها حتى لو انا خدتهم قبل كده و ده ممكن يعمل overlapping بس عادى

ال intervals هيبقوا كده

$$[-1, 2], [0, 3]$$

هنجيب ال function في كل interval بقى و هنتسخدم Newton

$$P_3(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2! h^2} \Delta^2 f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3! h^3} \Delta^3 f_0$$

$$P_3(x) = 0.25x^3 + 0.75x^2 + 2x + 3$$

$$Q_3(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2! h^2} \Delta^2 f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3! h^3} \Delta^3 f_0$$

$$Q_3(x) = 0.5x^3 + 2.5x + 3$$

لما نیچی نحسب بقى قيمه ال function عند ال value اللى هوا طالبها هلاقى انها موجوده فى ال 2 intervals طيب هعوض فى P or Q ؟

المفروض اعوض فى الاتنين و اشوف مين الى يطلع حل اقرب للصح و بنسبه error اقل
فا لما عوضنا طلع كده

$$P_3(1.5) = 8.53125$$

$$Q_3(x) = 8.4375$$

طيب و لو قلنا ان اصلا شكل ال function دى ال exact هوا

$$f(x) = 3 * 2^x$$

يبقى لما احسب ال exact value هتبقى

$$f(1.5) = 8.4852$$

و كده ده معناه ان التعريف التانى اللى هوا ال Q هى اللى طلعت Accuracy احسن ☺

4- Basis Cubic Spline:

مهم 10* ☺ لازم يجى عليه سؤال فى الامتحان طويل بس سهل و درجاته المفروض مضمونه ان شاء الله

اولا كده شكل ال Function بيبقى كده:

$$C(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i B_i(x)$$

ال B_i دى هى ال Basis Function و دى ليها شكل معين كده لازم يتحفظ

$$B_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{4h^3}(x - x_{i-2})^3, & x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h}(x - x_{i-1}) + \frac{3}{4h^2}(x - x_{i-1})^2 - \frac{3}{4h^3}(x - x_{i-1})^3, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h}(x_{i+1} - x) + \frac{3}{4h^2}(x_{i+1} - x)^2 - \frac{3}{4h^3}(x_{i+1} - x)^3, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \frac{1}{4h^3}(x_{i+2} - x)^3, & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

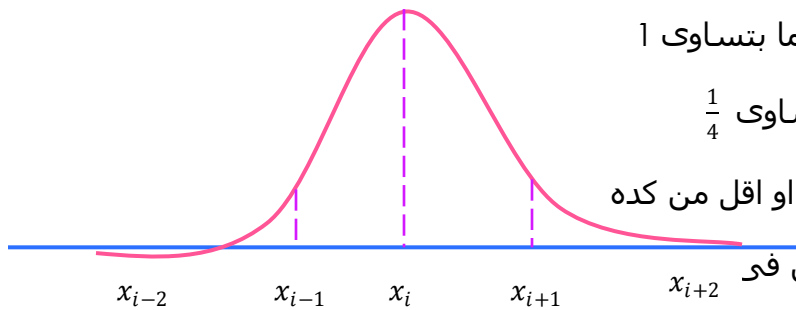
ال B_i دى بحسبها لكل نقطه فى ال points اللى فى السؤال و هى عبارة عن function متعرفه على 4 subintervals زى ما احنا شايفين فوق كده , ودى شكلها بالرسم

ال Function دى ليها مميزات او خواص معينه

اولا لو انا بحسب مثلا $B_n(x_n)$ دى دايما بتساوى 1

ولو انا بحسب $B_n(x_{n\pm 1})$ دى داميا بتساوى $\frac{1}{4}$

او حبيت احسبها بقى عند حاجه اكبر او اقل من كده



دايما هتدبنى صفر زى ما احنا شايفين فى

الرسمه دى كده.

طيب دلوقتى علشان احل مسأله باستخدام الطريقه دى المفروض اعمل ايه يعنى برضوه ؟

هوا المفروض ان انا اعرف قيم ال B , α علشان اعوض فى المعادله بتاعت ال C اللى فوق دى

طيب دول هجيبهم منين ؟

المفروض ان هنا فى اثبات و كده و لكن نظرا لانه طويل + رخم + مش مفهوم فا انا مش هكتبه و هكتب القوانين على طول ☺

اولا قانون ال α بيقول:

$$\alpha_n = b_n$$

$$\alpha_i = b_i - (a_i \alpha_{i+1})$$

طيب احنا متفقدناش على كده مين ال a, b دول ؟

دول قيم هنعوض بيها فى القانون اللى فوق ده و نعرف قيمهم من القوانين دى

$$a_0 = \frac{1}{4}$$

$$a_i = \frac{1}{4 - a_{i-1}}, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$b_0 = f_0$$

$$b_i = (4f_i - b_{i-1}) * a_i, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$b_n = \frac{4f_n - b_{n-1}}{4 - a_{n-1}}$$

طیب نرتب افکارنا تانی و بعدین نشوف حل مثال

اول حاجه لما یقول احل بالطریقه دی هجیب ال a, b و بعدین اعوض فی القانون بتاع ال α علشان اجیب قیّمها و بعدین احسب ال B و بکده اکون وصلت لشکل ال Function

نحل بقى مثال لان حاسه ان کل ده کلام مش مفهوم ☺

Ex:

Determine the Cubic Spline interpolation functions

X	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1
F	1	3	2	1	0	2	1

هنا عندنا 7 points یعنی عایزه معادله من الدرجه $n = 6$

شکل المعادله اللى انا عایزها هیکون کده

$$C(x) = \alpha_0 B_0 + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 + \alpha_4 B_4 + \alpha_5 B_5 + \alpha_6 B_6$$

وطبعا متفقین ان احنا هنقسم کل نقطتین مع بعض فا هبقى عندنا 6 intervals

$$\left[\frac{0}{6}, \frac{1}{6}\right], \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right], \left[\frac{5}{6}, 1\right]$$

اول خطوه هحسب ال a

$$a_0 = \frac{1}{4}$$

ودى موجودة فى القانون

$$a_1 = \frac{1}{4 - a_0} = \frac{1}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{15}$$

وده تعويض مباشر فى القانون اللى فوق هكمل على هذا الاساس

$$a_2 = \frac{1}{4 - \frac{4}{15}} = \frac{15}{56}$$

$$a_3 = \frac{1}{4 - \frac{15}{56}} = \frac{56}{209}$$

$$a_4 = \frac{1}{4 - \frac{56}{209}} = \frac{209}{780}$$

$$a_5 = \frac{1}{4 - \frac{209}{780}} = \frac{780}{2911}$$

وخلى بالكوا ان قانون ال a بيمشى لحد $n - 1$ بس

بعدين بقى نحسب ال b

$$b_0 = f_0 = 1$$

$$b_1 = (4f_1 - b_0) * a_1 = ((4 * 3) - 1) * \frac{4}{15} = \frac{44}{15}$$

برضوه تعويض مباشر و هكمل الباقي على نفس الاساس

$$b_2 = \left(4 * 2 - \frac{44}{15}\right) * \frac{15}{56} = \frac{19}{14}$$

$$b_3 = \left(4 * 1 - \frac{19}{14}\right) * \frac{56}{209} = \frac{148}{209}$$

$$b_4 = \left(4 * 0 - \frac{148}{209}\right) * \frac{209}{780} = -\frac{37}{195}$$

$$b_5 = \left(4 * 2 + \frac{37}{195}\right) * \frac{780}{2911} = \frac{6388}{2911}$$

$$b_6 = \frac{4f_6 - b_5}{4 - a_5} = \frac{4 * 1 - \frac{6388}{2911}}{4 - \frac{780}{2911}} = 0.4837$$

بس كده نبدأ نحسب الـ α بقى

$$\alpha_n = b_n$$

$$\alpha_6 = b_6 = 0.4837$$

$$\alpha_i = b_i - (a_i * \alpha_{i+1})$$

القانون ده ماشى بالعكس فا هنمشى من تحت لفوق يعنى ☺

$$\alpha_5 = b_5 - (a_5 \alpha_6) = 2.0648$$

$$\alpha_4 = b_4 - (a_4 \alpha_5) = -0.743$$

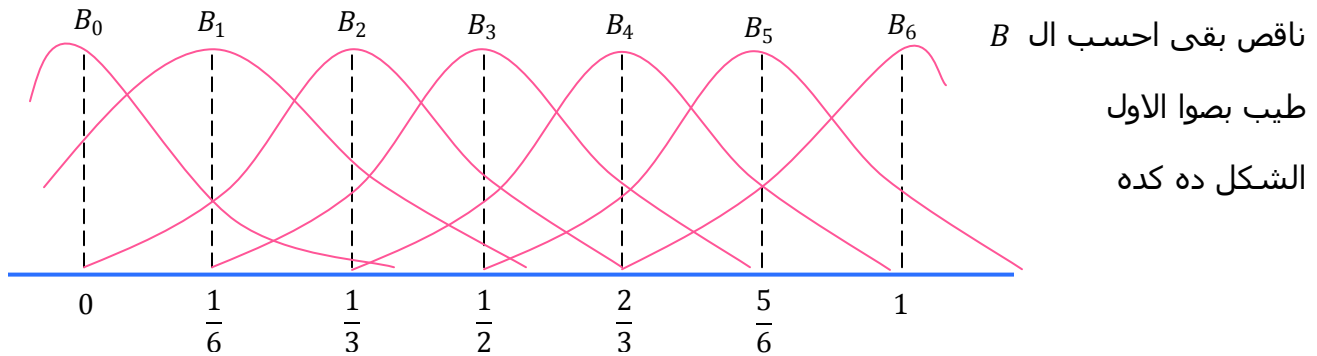
$$\alpha_3 = b_3 - (a_3 \alpha_4) = 0.9072$$

$$\alpha_2 = b_2 - (a_2 \alpha_3) = 1.1141$$

$$\alpha_1 = b_1 - (a_1 \alpha_2) = 2.6362$$

$$\alpha_0 = b_0 - (a_0 \alpha_1) = 1 - \left(\frac{1}{4} * \frac{44}{15}\right) = 0.2667$$

بس كده تمام طلعتنا كل قيم الـ α



طيب هنبص على اول interval عندنا اللى هى $\left[0, \frac{1}{6}\right]$ ايه هى الـ B' s اللى ليها قيمه فى الـ interval دى؟

هلاقى ان اللى ليهم قيمه هما B_0, B_1, B_2 طيب اشمعنه ؟

لان احنا دلوقتى وقفين عند $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}$

و من خواص ال B انها بيبقى ليها قيمه عند النقطه اللى انا واقفه عندها او اللى بعدى على طول
او اللى قبلى على طول لكن غير كده بتبقى بصفر
فا لو بصينا هنا هنلاق ان انا عندى:

$$B_0(x_0) = B_0(0) = 1$$

$$B_0(x_1) = B_0\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4}$$

$$B_0(x_2) = B_0\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

و هتفضل 0 بقى كل ما ازود كمان

$$B_1(0) = \frac{1}{4}$$

$$B_1\left(\frac{1}{6}\right) = 1$$

$$B_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

$$B_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

طيب و مين تانى شايف ال $\left[0, \frac{1}{6}\right]$ هنلاقي كمان ال B_2

$$B_2(0) = 0$$

$$B_2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4}$$

فا بالتالى فى الفتره دى ال B' اللى ليها قيمه هى B_0, B_1, B_2

طيب عموما لو انا واقفه عند $[x_n, x_{n+1}]$ كده ال B' اللى ليها قيمه هتبقى

$$B_n, B_{n+1}, B_{n-1}, B_{n+2}$$

نطبق الكلام ده بقى على كل ال Intervals

$$\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right] \rightarrow B_0, B_1, B_2, B_3$$

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow B_1, B_2, B_3, B_4$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \rightarrow B_2, B_3, B_4, B_5$$

$$\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right] \rightarrow B_3, B_4, B_5, B_6$$

$$\left[\frac{5}{6}, 1\right] \rightarrow B_4, B_5, B_6$$

طیب تمام انا کده عرفت شکل ال C نکتبه بقى

$$C(x) = \begin{cases} \alpha_0 B_0(x) + \alpha_1 B_1(x) + \alpha_2 B_2(x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{6} \\ \alpha_0 B_0(x) + \alpha_1 B_1(x) + \alpha_2 B_2(x) + \alpha_3 B_3(x), & \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \alpha_1 B_1(x) + \alpha_2 B_2(x) + \alpha_3 B_3(x) + \alpha_4 B_4(x), & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha_2 B_2(x) + \alpha_3 B_3(x) + \alpha_4 B_4(x) + \alpha_5 B_5(x), & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \alpha_3 B_3(x) + \alpha_4 B_4(x) + \alpha_5 B_5(x) + \alpha_6 B_6(x), & \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{6} \\ \alpha_4 B_4(x) + \alpha_5 B_5(x) + \alpha_6 B_6(x), & \frac{5}{6} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

طیب المفروض احنا عارفين قيم ال α بس لو عايزين نجيب قيمه ال Function دى عند مثلا $C(0.31)$ هعمل ايه؟

اولا لازم احدد ال Interval اللى ال value موجوده فيها علشان اعوض فى ال function اللى قدامها

هلاقى انها فى ال interval دى

$$\frac{1}{6} \leq 0.31 \leq \frac{1}{3}$$

يبقى المفروض هعوض فى:

$$C(x) = \alpha_0 B_0(x) + \alpha_1 B_1(x) + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3$$

طیب نعوض بقيمه ال x و قيم ال α و نشوف المنظر كده

$$C(0.31) = 0.2667 B_0(0.31) + 2.6362 B_1(0.31) + 1.1141 B_2(0.31) + 0.9072 B_3(0.31)$$

طیب فاكرين بقى شكل ال B اللى قلناه فى الاول و قلنا لازم نحفظه ده ؟

نروح نبص عليه بقى علشان نطلع قيم ال B دى كلها

اولا عايزين قيمه $B_0(0.31)$

هنعوض فى الشكل ده

$$B_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{4h^3}(x - x_{i-2})^3, & x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h}(x - x_{i-1}) + \frac{3}{4h^2}(x - x_{i-1})^2 - \frac{3}{4h^3}(x - x_{i-1})^3, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h}(x_{i+1} - x) + \frac{3}{4h^2}(x_{i+1} - x)^2 - \frac{3}{4h^3}(x_{i+1} - x)^3, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \frac{1}{4h^3}(x_{i+2} - x)^3, & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

واشوف مين فيهم الحالة اللى هنتحقق

$$B_0(0.31) = \begin{cases} \frac{1}{4h^3}(0.31 - x_{0-2})^3, & x_{0-2} \leq 0.31 \leq x_{0-1} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h}(0.31 - x_{0-1}) + \frac{3}{4h^2}(0.31 - x_{0-1})^2 - \frac{3}{4h^3}(0.31 - x_{0-1})^3, & x_{0-1} \leq 0.31 \leq x_0 \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h}(x_{0+1} - 0.31) + \frac{3}{4h^2}(x_{0+1} - 0.31)^2 - \frac{3}{4h^3}(x_{0+1} - 0.31)^3, & x_0 \leq 0.31 \leq x_{0+1} \\ \frac{1}{4h^3}(x_{0+2} - 0.31)^3, & x_{0+1} \leq 0.31 \leq x_{0+2} \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

طيب افكركو بس ان احنا شغالين على ال interval بتاعت ال $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ يعنى اللى هى بتاعت $[x_1, x_2]$

فا طبعا واضح ان التعريف اللى هينفع هوا ال رابع ☺ فا هنعوض فيه بقى

$$\begin{aligned} B_0(0.31) &= \frac{1}{4h^3}(x_{0+2} - 0.31)^3 \\ &= \frac{1}{4 * \left(\frac{1}{6}\right)^3} \left(\frac{1}{3} - 0.31\right)^3 = 6.86 * 10^{-4} \end{aligned}$$

المفروض بقى نكمل على هذا الاساس فا انا هكمل يعنى الباقي ☺

ال B_1 هتاخذ التعريف التالت

$$B_1(0.31) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4h}(x_2 - 0.31) + \frac{3}{4h^2}(x_2 - 0.31)^2 - \frac{3}{4h^3}(x_2 - 0.31)^3$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4 * \frac{1}{6}} \left(\frac{1}{3} - 0.31 \right) \right) + \frac{3}{4 * \left(\frac{1}{6} \right)^2} \left(\frac{1}{3} - 0.31 \right)^2 - \frac{3}{4 * \left(\frac{1}{6} \right)^3} \left(\frac{1}{3} - 0.31 \right)^3$$

وال B_2 هتأخذ التعريف التانى

$$B_2(0.31) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4h}(0.31 - x_1) + \frac{3}{4h^2}(0.31 - x_1)^2 - \frac{3}{4h^3}(0.31 - x_1)^3$$

وال B_3 هتأخذ التعريف الاول

$$B_3(0.31) = \frac{1}{4h^3}(0.31 - x_1)^3$$

وبس نعوض بقى و نشوف القيم و بعدين نعوض فى المعادله اللى سبناها فوق دى:

$$C(0.31) = 0.2667 B_0(0.31) + 2.6362 B_1(0.31) + 1.1141 B_2(0.31) + 0.9072 B_3(0.31)$$

ونطلع قيمه ال function عند ال Value دى

$$B_0(0.31) = 6.86 * 10^{-4}$$

$$B_1(0.31) = 0.367642$$

$$B_2(0.31) = 0.972658$$

$$B_3(0.31) = 0.159014$$

$$C(0.31) = 2.19726$$

Ex:

Fit B-Spline to the data

$$(-3, -27), (-2, -8), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 8), (3, 27)$$

Use the result to approximate the value at $x = 1.5$?

$$\# \text{ points} = 7 \rightarrow \text{degree of equation} = 6$$

$$C(x) = \sum_{i=0}^6 \alpha_i B_i(x)$$

$$C(x) = \alpha_0 B_0 + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 + \alpha_4 B_4 + \alpha_5 B_5 + \alpha_6 B_6$$

$$\alpha_n = b_n$$

$$\alpha_i = b_i - (a_i \alpha_{i+1})$$

$$a_0 = \frac{1}{4}$$

$$a_i = \frac{1}{4 - a_{i-1}}$$

$$b_0 = f_0$$

$$b_i = (4f_i - b_{i-1}) * a_i$$

$$b_n = \frac{4f_n - b_{n-1}}{4 - a_{n-1}}$$

*Find the values of (a)

$$a_0 = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{1}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{15}$$

$$a_2 = \frac{1}{4 - \frac{4}{15}} = \frac{15}{56}$$

$$a_3 = \frac{1}{4 - \frac{15}{56}} = \frac{56}{209}$$

$$a_4 = \frac{1}{4 - \frac{56}{209}} = \frac{209}{780}$$

$$a_5 = \frac{1}{4 - \frac{209}{780}} = \frac{780}{2911}$$

*Find the values of (b)

$$b_0 = -27$$

$$b_1 = (4 * -8 + 27) * \frac{4}{15} = -\frac{4}{3}$$

$$b_2 = \frac{22}{7}$$

$$b_3 = -\frac{16}{9}$$

$$b_4 = \frac{368}{285}$$

$$b_5 = 8.2284$$

$$b_6 = 26.7337$$

*Find the values of (α)

$$\alpha_6 = 26.7337$$

$$\alpha_5 = 1.0651$$

$$\alpha_4 = 1.0104$$

$$\alpha_3 = -1.1128$$

$$\alpha_2 = 3.04409$$

$$\alpha_1 = -16.6509$$

$$\alpha_0 = -22.8373$$

*Find the value of (B)

$$[x_i, x_{i+1}] \rightarrow B_{i-1}, B_i, B_{i+1}, B_{i+2}$$

$$[-3, -2] \rightarrow B_0, B_1, B_2$$

$$[-2, -1] \rightarrow B_0, B_1, B_2, B_3$$

$$[-1, 0] \rightarrow B_1, B_2, B_3, B_4$$

$$[0, 1] \rightarrow B_2, B_3, B_4, B_5$$

$$[1, 2] \rightarrow B_3, B_4, B_5, B_6$$

$$[2, 3] \rightarrow B_4, B_5, B_6$$

$$C(x) = \begin{cases} \alpha_0 B_0(x) + \alpha_1 B_1(x) + \alpha_2 B_2(x), & -3 \leq x \leq -2 \\ \alpha_0 B_0(x) + \alpha_1 B_1(x) + \alpha_2 B_2(x) + \alpha_3 B_3(x), & -2 \leq x \leq -1 \\ \alpha_1 B_1(x) + \alpha_2 B_2(x) + \alpha_3 B_3(x) + \alpha_4 B_4(x), & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha_2 B_2(x) + \alpha_3 B_3(x) + \alpha_4 B_4(x) + \alpha_5 B_5(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ \alpha_3 B_3(x) + \alpha_4 B_4(x) + \alpha_5 B_5(x) + \alpha_6 B_6(x), & 1 \leq x \leq 2 \\ \alpha_4 B_4(x) + \alpha_5 B_5(x) + \alpha_6 B_6(x), & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

And substitute with the values of (α)

*Find the value of $C(1.5)$

ال 1.5 دى واقعه فى خامس interval اللى هى $1 \leq x \leq 2$ و بالتالى هعوض فى المعادله اللى قدامها اللى هى

$$C(x) = \alpha_3 B_3(x) + \alpha_4 B_4(x) + \alpha_5 B_5(x) + \alpha_6 B_6(x)$$

$$C(x) = -1.1128 B_3(x) + 1.0104 B_4(x) + 1.0651 B_5(x) + 26.7337 B_6(x)$$

نروح بقى نشوف ال Basis function علشان نطلع قيم ال B

$$B_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{4h^3} (x - x_{i-2})^3, & x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h} (x - x_{i-1}) + \frac{3}{4h^2} (x - x_{i-1})^2 - \frac{3}{4h^3} (x - x_{i-1})^3, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h} (x_{i+1} - x) + \frac{3}{4h^2} (x_{i+1} - x)^2 - \frac{3}{4h^3} (x_{i+1} - x)^3, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4h^3} (x_{i+2} - x)^3, & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

اول حاجه عايزه اجيب $B_3(x)$ ببقى هعوض فى الشكل ده عن $i = 3$

$$B_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{4h^3} (x - x_{i-2})^3, & x_{3-2} \leq x \leq x_{3-1} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h} (x - x_{i-1}) + \frac{3}{4h^2} (x - x_{i-1})^2 - \frac{3}{4h^3} (x - x_{i-1})^3, & x_{3-1} \leq x \leq x_3 \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h} (x_{i+1} - x) + \frac{3}{4h^2} (x_{i+1} - x)^2 - \frac{3}{4h^3} (x_{i+1} - x)^3, & x_3 \leq x \leq x_{3+1} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4h^3} (x_{i+2} - x)^3, & x_{3+1} \leq x \leq x_{3+2} \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

طيب اولا احنا شغالين على Interval اللي هي $1 \leq x \leq 2$ يعنى اللي هي $x_4 \leq x \leq x_5$ ببقى بعد ما عوضت هشوف مين التعريف اللي واقع فى ال interval دى هلاقى ان هوا رابع واحد ببقى هعوض فيه

$$B_3(x) = \frac{1}{4h^3}(x_{i+2} - x)^3, \quad x_{3+1} \leq x \leq x_{3+2}$$

$$B_3(x) = \frac{1}{4h^3}(x_{i+2} - x)^3, \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$\begin{aligned} B_3(1.5) &= \frac{1}{4h^3}(x_5 - 1.5)^3, \quad 1 \leq x \leq 2 \\ &= \frac{1}{4}(2 - 1.5)^3 = 0.0313 \end{aligned}$$

ال $B_4(x)$ هتاخذ تالت تعريف

$$\begin{aligned} B_4(1.5) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(2 - 1.5) + \frac{3}{4}(2 - 1.5)^2 - \frac{3}{4}(2 - x)^3 \\ B_4(1.5) &= 0.7188 \end{aligned}$$

وال $B_5(x)$ هتاخذ التعريف التانى

$$\begin{aligned} B_5(1.5) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1.5 - 1) + \frac{3}{4}(1.5 - 1)^2 - \frac{3}{4}(1.5 - 1)^3 \\ B_5(1.5) &= 0.7188 \end{aligned}$$

ال $B_6(x)$ هتاخذ اول تعريف

$$B_6(1.5) = \frac{1}{4}(1.5 - 1)^3 = 0.0313$$

Substitute in $C(x)$

$$C(x) = -1.1128 B_3(x) + 1.0104 B_4(x) + 1.0651 B_5(x) + 26.7337 B_6(x)$$

$$C(1.5) = -1.1128 (0.0313) + 1.0104 (0.7188) + 1.0651 (0.7188) + 26.7337 (0.0313)$$

$$C(1.5) = 2.2938$$

Curve Fitting

قبل كده لما كنا بنتكلم فى ال Interpolation كنا بنقول ان ال Data points اللى ناتجه من تجربه معينه هى Accurate Data و بالتالى لما كنا نجيب المعاده كان لازم المعادله دى تحقق كل ال Points يعنى يكون ال curve بتاعها بيعدى على كل ال Points اللى عندنا.

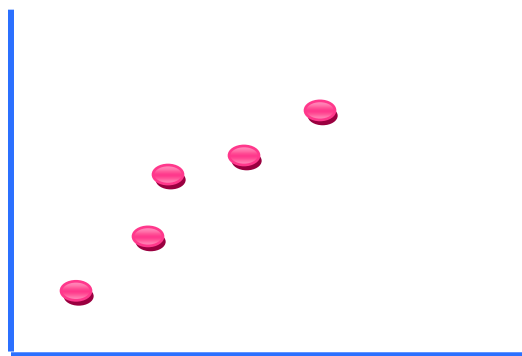
نفس الكلام هيجصل فى ال Curve Fitting بس الفرق ان هنا ال Data points مش Accurate يعنى عبارته عن قيمه Approximated مش Exact و بتكون شبه القيمه ال Exact فى تقريبا 2 or 3 decimal digits.

حاجه كمان فى ال Curve Fitting ان انا قبل ما اطلع المعادله بكون عارفه ايه شكل المعادله اللى عايزه اوصلها يعنى مثلا linear equation او كده.

لو افترضنا مثلا ان عندنا عدد N من ال Points حاجه زى كده مثلا :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$$

و كان شكل النقط دى على ال graph عامل كده مثلا



اللى عايزين نوصله ان احنا نشوف احسن Line يربط بين النقط دى و طبعا مش شرط يعدى عليهم كلهم لانهم اصلا مش Accurate Data فا احنا هنجيب الخط اللى يعتبر بيطلع اقل نسبه Error بين النقط دى

السؤال هوا اللى بيحددلى شكل ال function سواء Linear , Quadratic , and so on الطبيعى ان احنا نكون عارفين شكل ال function بس ناقص نعرف ال coefficient بتوعها

احنا المفروض الاساس عندنا هى المعادلات الخطيه اللى هى على الشكل ده

$$f(x) = Ax + B$$

و الشكل التانى الى هنقله برضو هو المعادلات الاسية او ال Power Functions اللى هى على الشكل ده

$$f(x) = Ax^m$$

ای معادله علی ای شکل تانی بنحولها لمعادله خطیه و بعدین نحلها بطریقه حل المعادلات الخطیه اللی هنقول علیها فی المحاضره دی ان شاء الله ☺ و هنقول کمان علی اشکال ال Functions اللی ممکن نحولها و ازای نحولها

طبعا بما ان ال points اصلا Approximated ده معناه ان فی نسبه Error و لیه 3 معايير هما:

Maximum Error

$$E_{\infty}(f) = \max_{1 \leq i \leq N} \{|f(x_i) - y_i|\}$$

Minimum Error

$$E_1(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|$$

Root Mean Square Error (RMS)

الی الدكتور قالت علیها النهارده و حلینا علیها و ده لیه قانون بسیط کده و بنعوض فیها و هنشوف برضوه امثله علی التعویض و کده

$$E_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

هنا ال N هی عدد ال Points و ال $f(x_i)$ هی القیمه ال Exact و ال y_i هی القیمه ال Approximated

طیب نشوف بقی ازای نحل المعادلات الخطیه

1- Least Square Method "Fitting in Linear Line"

$$f(x) = Ax + B$$

زی ما اتفقنا ده کده الشكل العام للمعادله الخطیه, دلوقتی الحاجات المجهوله عندنا هی ال A , B و هما دول اللی ناقصین علشان نعرف شکل ال Line اللی بیعدی علی ال points اللی عندنا فا لما نعوض فی القانون بتاع ال RMS اللی فوق ده و نظبط شکله کده هیدینا معادلتین احلهم علی حسب المسأله فا هیطلع شکل ال Line فا انا هکتب حالیا حاجه زی prove کده فا ممکن تعملوا ☺ Escape

To find the best Linear approximation of the linear equation that goes near (not always through) the points:

$$E_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Ax_i + B - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_2(A, B) = \sum_{i=1}^N |Ax_i + B - y_i|^2$$

By partial differentiation to find the minimum error

$$\frac{\partial E_2}{\partial A} = 2 \sum_{i=1}^N |Ax_i + B - y_i| x_i = 0$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial B} = 2 \sum_{i=1}^N |Ax_i + B - y_i| = 0$$

$$\sum_{i=1}^N |Ax_i + B - y_i| x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^N |Ax_i + B - y_i| = 0$$

$$\sum_{i=1}^N Ax_i^2 + B \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^N Ax_i + NB = \sum_{i=1}^N y_i$$

وهما دول بقى اللى بنعوض فيهم فى الحل

Ex:

Find the least square line for the data

x_i	y_i
-1	10
0	9
1	7
2	5
3	4
4	3
5	0
6	-1

ده كده ال Data points اللی قالی علیها و عایزنی احسب احسن line یدی اقل نسبه Error
فا احنا المفروض نعوض فی القانونین اللی لسه مطلعینهم اللی هما دول:

$$\sum_{i=1}^N Ax_i^2 + B \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^N Ax_i + NB = \sum_{i=1}^N y_i$$

فا هنروح نزود ال Columns دی علی الجدول و نحسب ال Summation بتاعهم

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
-1	10	1	-10
0	9	0	0
1	7	1	7
2	5	4	10
3	4	9	12
4	3	16	12
5	0	25	0
6	-1	36	-6
Sum = 20	Sum = 37	Sum = 92	Sum = 25

ونعوض بقی فی المعادلات کل حاجه بقت موجوده اهو

$$92A + 20B = 25$$

$$20A + 8B = 37$$

و هنجل المعادلتين دول بطريقه Cramer بس طبعا كل واحد حر يحلها زي ما هوا شايف ☺

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 20 \\ 37 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 92 & 20 \\ 20 & 8 \end{vmatrix}} = -1.6$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 92 & 25 \\ 20 & 37 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 92 & 20 \\ 20 & 8 \end{vmatrix}} = 8.6$$

$$f(x) = -1.6x + 8.6$$

علشان نحسب قيمه ال Error بقى هنعوض فى القانون اللى هوا ده:

$$E_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتالى هنزود شويه Columns على ال Table اللى فوق ده الى هما :

$f(x_i)$	$ f(x_i) - y_i $	$ f(x_i) - y_i ^2$
----------	------------------	--------------------

و نحسب القيم دى و نعوض فى القانون و بس كده ☺



Power Fitting

هنا بقى لو طلب ان شكل ال function تكون power function و ال Power بتاعها M مثلا و هوا هيقول فى السؤال عايزها power كام، الشكل العام للمعادلات دى هو

$$f(x) = Ax^M$$

وبما ان M is given يبقى كده ناقصنا ال A بس و التعويض بتاعها سهل اوى , هنعوض فى قانون ال RMS برضوه

$$E_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_2(A) = \sum_{i=1}^N |Ax_i^M - y_i|^2$$

$$\frac{dE_2}{dA} = 2 \sum_{i=1}^N |Ax_i^M - y_i| x_i^M$$

$$A \sum_{i=1}^N x_i^{2M} = \sum_{i=1}^N x_i^M y_i$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^M y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^{2M}}$$

و هو ده كده القانون اللى بنعوض فيه و لما نحل مسأله نعمل جدول كذلك علشان يبقى التعويض اسهل

حاجه زى كده

x_i	y_i	x_i^M	x_i^{2M}	$x_i^M y_i$
-------	-------	---------	------------	-------------

نشوف مثال كده

Ex:

Obtain the coefficients for a second degree power fit of the following data

x_i	y_i
0.2	0.1960
0.4	0.7850
0.6	1.7665
0.8	3.1405
1	4.9075

اول حاجه هنحط الجدول الجديد و نحسب ال Values اللى ناقص

x_i	y_i	$x_i^2 y_i$	x_i^4
0.2	0.1960	0.00784	0.0016
0.4	0.7850	0.12560	0.0256
0.6	1.7665	0.63594	0.1296
0.8	3.1405	2.00992	0.4096
1	4.9075	4.90750	1.0000
		Sum = 7.68680	Sum = 1.5664

و نعوض بقى فى القانون

$$A = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^M y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^{2M}}$$

$$A = \frac{7.68680}{1.5664} = 4.9073$$

$$f(x) = 4.9073 x^2$$

Transformation from other forms to linear form

هنا بقى هنشوف باقى الاشكال اللى ممكن تجيلنا نعملها Fitting و هنشوف ازاي نحول كل واحده ل Linear علشان نحلها بالطريقه اللى احنا عرفناها دى ☺

Exponential Form

طبعا كلنا عارفين الدوال ال Exponential اللى هى الشكل العام ليها كده

$$y = C e^{Ax}$$

علشان بقى احل معادله و انا عارفه ان شكلها عامل كده لازم الاول احولها Linear واحلها Linear وبعدين ابقى ارجعها للشكل ده تانى

وعلشان احولها Linear هعملها حاجه اسمها Linearization

اولا هاخد ln الطرفين

$$\ln y = \ln C + Ax$$

وهعوض عن:

$$Y = \ln y$$

$$B = \ln C$$

$$X = x$$

فا الناتج هيبقى معادله linear على الشكل ده

$$Y = AX + B$$

و احلها على هذا الاساس بقى و بعدين ابقى اعوض و اجيب الشكل الاولانى

طبعا بعد ما اعوض و اجيب قيم x, y بتوع المعادله الاصليه, لو طلب منى ال Error هجييه على اساسهم مش على اساس X, Y ☺

نشوف مثال بقى علشان نفهم الدنيا ماشيه ازاي

Ex:

Use the linearization method and find the exponential fit $y = C e^{Ax}$ for the data points

x_i	y_i
0	1.5
1	2.5
2	3.5
3	5
4	7.5

زى ما اتفقنا قبل كده

$$(X_i, Y_i) == (x_i, \ln y_i)$$

و طبعا قوانين ال Linear اللى هنعوض فيها هى

$$\sum_{i=1}^N Ax_i^2 + B \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^N Ax_i + NB = \sum_{i=1}^N y_i$$

نعمل الجدول الجديد بقى

x_i	y_i	$X_i = x_i$	$Y_i = \ln y_i$	X_i^2	$X_i Y_i$
0	1.5	0	0.4054	0	0
1	2.5	1	0.916291	1	0.91629
2	3.5	2	1.2527	4	2.5055
3	5	3	1.609	9	4.8283
4	7.5	4	2.01490	16	8.0596
		Sum = 10	Sum = 6.198	Sum = 30	Sum = 16.3097

ونعوض فى القوانين

$$30A + 10B = 16.3097$$

$$10A + 5B = 6.198$$

ونحل ب Cramer

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 16.3 & 10 \\ 6.19 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}} = 0.3192$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 16.3 \\ 10 & 6.19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}} = 0.4573$$

نرجع نعوض بقى فى شكل المعادله اللى احنا عايزينه اصلا

$$B = \ln C$$

$$C = e^B \rightarrow C = e^{0.4573} = 1.57991$$

$$y = 1.57991e^{0.3192x}$$

وبس كده ☺

طبعا احنا بنفضل نحول من اى شكل لل Linear و نحل بطريقة ال Linear لانه اسهل من اننا نحله على نفس شكل ال function اللى قايل عليها
هنشوف بقى دلوقتى جدول حلو كده فيه اشكال ال functions اللى ممكن نشوفها فيما بعد و
طريقة تحويل كل واحدة منهم لل Linear

Function $y = f(x)$	Linearization Form $Y = AX + B$	Change of Variables and Constants
$y = \frac{A}{x} + B$	$y = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}, Y = y$
$y = \frac{D}{x + C}$	$y(x + C) = D$ $yx + yC = D$ $y = -\frac{1}{C}xy + \frac{D}{C}$	$X = xy$ $Y = y$ $A = -\frac{1}{C}, B = \frac{D}{C}$
$y = \frac{1}{Ax + B}$	$\frac{1}{y} = Ax + B$	$X = x, Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{A + Bx}$	$\frac{1}{y} = \frac{A + Bx}{x}$ $\frac{1}{y} = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}$ $Y = \frac{1}{y}$
$y = A \ln x + B$	$y = A \ln x + B$	$X = \ln x, Y = y$
$y = Ce^{Ax}$	$\ln y = Ax + \ln C$	$X = x, Y = \ln y, B = \ln C$
$y = Cx^A$	$\ln y = A \ln x + \ln C$	$X = \ln x, Y = \ln y, B = \ln C$
$y = (Ax + B)^{-2}$	$y^{-\frac{1}{2}} = Ax + B$	$X = x, Y = y^{-\frac{1}{2}}$
$y = Cxe^{-Dx}$	$\frac{y}{x} = Ce^{-Dx}$ $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = -Dx + \ln C$	$X = x, Y = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ $B = \ln C, A = -D$
$y = \frac{L}{1 + Ce^{Ax}}$	$\ln\left(\frac{L}{y} - 1\right) = Ax + \ln C$	$X = x, Y = \ln\left(\frac{L}{y} - 1\right)$ $B = \ln C$

Ex:

Find the least square line $y = Ax + B$ for the data and find $E_2(f(x))$?

x_i	y_i
-2	1
0	3
2	6
4	8
6	13

القوانين اللى هنعوض فيها هى :

$$\sum_{i=1}^N Ax_i^2 + B \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^N Ax_i + NB = \sum_{i=1}^N y_i$$

علشان نطلع معادلات نحلها علشان نعرف قيمه ال A , B كده هنزود columns على الجدول

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
-2	1	4	-2
0	3	0	0
2	6	4	12
4	8	16	32
6	13	36	78
Sum = 10	Sum = 31	Sum = 60	120

$$60 A + 10 B = 120$$

$$10 A + 5 B = 31$$

Using Cramer

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 10 \\ 31 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 60 & 10 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}} = 1.4$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 60 & 120 \\ 10 & 31 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 60 & 10 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}} = 3.3$$

$$y = 1.4 x + 3.3$$

To find RMS

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$f(x_i)$	$ f(x_i) - y_i ^2$
-2	1	4	-2	0.4	0.36
0	3	0	0	3.3	0.09
2	6	4	12	6.2	0.04
4	8	16	32	9.1	1.21
6	13	36	78	13	1
Sum = 10	Sum = 31	Sum = 60	120		Sum = 2.7

$$E_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{2.7}{5}} = 0.7348$$

بس كده ☺

Ex:

Find the power fit $y = Ax$, $M = 1$, $E_2(f(x))$?

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$f(x_i)$	$ f(x_i) - y_i ^2$
1	1.6	1	1.6	1.58	0.0004
2	2.8	4	5.6	3.16	0.1296
3	4.7	9	14.1	4.74	0.0016
4	6.4	16	25.6	6.32	0.0064
5	8	25	40	7.9	0.01
Sum = 15		Sum = 55	Sum = 86.9		Sum = 0.148

$$E_2(f(x)) = \sqrt{\frac{0.148}{5}} = 0.172$$

$$A = \frac{86.9}{55} = 1.58$$

$$y = 1.58 x$$

Exponential Fit

$$y = C e^{Ax}$$

$$Y = \ln y$$

$$B = \ln C$$

$$Y = AX + B$$

Ex:

Use the linearization method to find the exponential fit $y = Ce^{Ax}$

x_i	y_i	$Y = \ln y$	x_i^2	$x_i y_i$
1	0.6	-0.5108	1	-0.5108
2	1.9	0.6419	4	1.2838
3	4.3	1.4586	9	4.3758
4	7.6	2.0281	16	8.1124
5	12.6	2.5337	25	12.6685
Sum = 15		Sum = 6.1515	Sum = 55	Sum = 25.9297

$$55A + 15B = 25.9297$$

$$15A + 5B = 6.1515$$

$$A = 0.7475$$

$$B = -1.0123$$

$$C = e^B = e^{-1.0123} = 0.3634$$

$$y = 0.3634 e^{0.7475x}$$

Ex:

$$y = \frac{1}{Ax + B}$$

$$\frac{1}{y} = Ax + B$$

$$Y = \frac{1}{y}$$

x_i	y_i	$Y = \frac{1}{y}$	x_i^2	$x_i y_i$
-1	6.62	0.1511	1	-0.1511
0	3.94	0.2538	0	0
1	2.17	0.4608	1	0.4608
2	1.35	0.7407	4	1.4814
3	0.89	1.1236	9	3.3708
Sum = 5		Sum = 2.73	Sum = 15	Sum = 5.1619

$$15 A + 5 B = 5.1619$$

$$5 A + 5 B = 2.73$$

$$A = 0.2432$$

$$B = 0.3028$$

$$y = \frac{1}{0.2432x + 0.3028}$$

2- Weighted Least Square Polynomial Approximation

الفرق بين الطريقة دي و الطريقة الاولى ان هنا ال data points بتبقى فيها نسبة errors مختلفة

يعنى ممكن الاقوى نقطتين بينهم و بين ال exact فى 3 decimal digits متشابهين و 3 نقط غيرهم متشابهين فى 5 decimal digits مثلا, يعنى ال accuracy بتاعت كل النقط مش زى بعضها, كل واحدة ليها ال **WEIGHT** بتاعها فا علشان كده مينفعش احل بالطريقة الاولى لان الطريقة الاولى بتجيب احسن خط يمر بكل النقط بيحث يطلع اقل نسبة error لكن هنا مش كل ال points ليها نفس ال weight او نفس درجة ال accuracy فا بالتالى من المنطقى ان انا عايزه ال curve يبقى اقرب للنقط الى ال accuracy بتاعتها عاليه علشان ده اللى هيدنى اقل نسبة error فى ال curve

لو افترضنا مثلا ان عندنا N data points :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$$

و كل point منهم ليها ال weight بتاعها

$$w_1, w_2, \dots, w_N$$

وانا عايزه اجيب احسن Polynomial بتمر بيهم , و طبعا علشان اضمن ان ال Polynomial هتبقى unique لازم تبقى من Order n بحيث ان $n \leq N$ و طبعا ال "n" دي اللى هى درجة ال Polynomial الدكتور هى اللى هتقولنا عليها فى السؤال

الشكل العام لل Polynomials

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

علشان نحسب ال error هنا هنعوض فى القانون ده

$$E = \sum_{i=1}^N |P_n(x_i) - y_i|^2 w_i$$

وبعد ما نعوض هيبقى ال error عبارة عن function فى ال coefficients بتاعت ال Polynomial

$$E(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^N |a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n - y_i|^2 w_i$$

وعلشان نضمن اقل error هنجيب ال partial differentiation بتاع ال Error ده بالنسبة لكل ال coefficients و هنساويه بالصفر

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial E}{\partial a_n} = 0$$

هيكون عندنا system من المعادلات

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^N 2w_i |a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n - y_i| (1) = 0$$

وهكذا بقى لكل ال coefficients و ال system الى هيطلع نحله بقى بأى طريقه guess مثلا

بس الدكتور بقى مش عايزه كده ☺

فا المفروض فى طريقه اسهل numerically علشان نحل بيها المعادلات دى و هى دى الى مطلوبه منا

اولا المعادله اللى عايزين نحلها هى:

$$V^t w V a = V^t w y$$

نشوف بقى كل حاجه من دول يعنى ايه ؟!

اولا كده اللى V

ودى عبارة عن Matrix بكتب فيها ال x كلها مرفوعه ل power من اول الصفر لحد ال n

يعنى لو افترضنا ان انا عندى $N = 5, n = 3$ يعنى عدد ال Points بيساوى 5 و مطلوب معادله من الدرجة التالته, شكل ال V هيبقى كده:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 \end{bmatrix}$$

و طبعا ال transpose matrix ال ال V بتاعت ال V يعنى كل column هنقلبه
يبقى row, هنا حجم ال V :

$$V_{N \times (n+1)}$$

ال w دى بقى عبارة عن diagonal matrix كل اللى فى ال diagonal بتاعها عبارة عن قيم
ال weights اللى بيقول عليها فى السؤال و باقى ال Matrix اكيد اصفار ☺

$$w = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_5 \end{bmatrix}$$

ودى حجمها:

$$w_{N \times N}$$

ال a ده بقى vector بنحط فيه ال coefficients اللى عايزين نحسبها (مجاهيل يعنى) مجرد
رموز

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

وده حجمه

$$a_{(n+1) \times 1}$$

آخر حاجه الى هى ال y و ده عبارة عن قيم ال y اللى بيقول عليها فى المسألة

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

ده من حجم

$$y_{N \times 1}$$

$$V_{(n+1)*N}^t w_{N*N} V_{N*(n+1)} a_{(n+1)*1} = V_{(n+1)*N}^t w_{N*N} y_{N*1}$$

و ده كده هيطلع فى الناحيتين Vector with size $(N+1)*1$ و نحل اخر System ده بقی بای
حاجه بس مش مطلوب مننا نحسبه فى الامتحان ☺

اخر حاجه فى ال Curve fitting ان ال weight ممكن ميقولش عليه بطريقه مباشره ممكن
يقولى ال relative error او ال root mean square error

طیب ازای اجیب منهم ال weight ؟

هعوض فى القوانين دى :

$$w = \frac{1}{R_E}$$

$$w = \frac{1}{(RMS)^2}$$

بس كده ☺

طبعا فى الطریقه دى فى الامتحان مش هنحل System مجرد بس هنكتب ال Matrices

Numerical Integration

هنتكلم بقی عن حاجه جدیده اللى هى التكامل ☺

زمان كنا نشوف functions كده و منقدرش نجیب التكامل بتاعها بای طریقه عادیه نعرفها
حاجه مثلا زى :

$$\int e^{x^2} dx, \int e^{\sin x} dx$$

الحاجات دى ليها طریقه من طریقتين

اما ان نفكها و نجیب ال Taylor Expansion بتاعها و نعمله تكامل

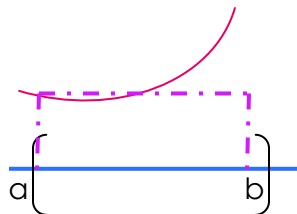
او نعوض فى ال function بأكثر من نقطه و اخذ النواتج و اعملها Interpolation و اعمل لل
Polynomial بتاعتها التكامل

1- Newton – Cots Quadrature Rules

Rectangular Rule

المفروض زى ما احنا عارفين ان التكامل هوا عبارة عن المساحة تحت المنحنى

لو افترضنا الرسمه دى كده



الطريقه دى بتفترض وجود نقطه واحده بس اللى هى الـ a و بتجيب المساحه تحتها

$$R(f) = (b - a)f(a)$$

Ex:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

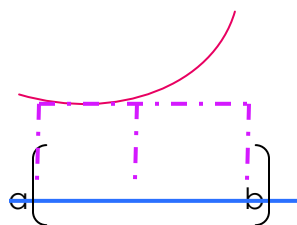
$$f(x) = e^{x^2}, a = 0, b = 1$$

$$R(f) = (1 - 0)f(0) = e^0 = 1$$

Midpoint Rule

هنا بيحيب النقطه اللى فى منتصف الـ Interval و يجيب المساحه تحتها

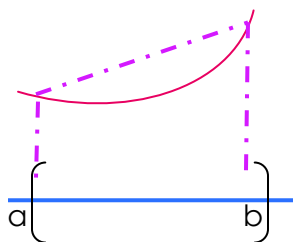
القانون بيقول



$$M(f) = (b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Trapezoidal Rule

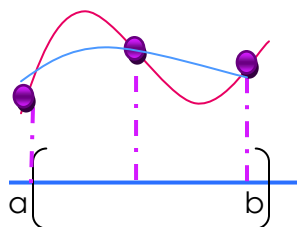
وهنا بناخذ شكل شبه المنحرف ونجيب مساحته اللي هي : نصف القاعده فى مجموع اطوال القاعدتين المتوازيين



$$T(f) = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Simpson's Rule

هنا بقى بناخذ 3 نقط و نجيب ال parabola اللي بيمر بيهم اللي هي معادله قطع مكافئ يعنى معادله من الدرجة الثانيه



$$S(f) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right]$$

Important Note

القوانين دى كلها valid لو هوا قالى على شكل ال function بس لو مش قال عليها و قالى على شويه

Data points هل هينفع اطبق نفس القوانين دى ؟

هو هينفع , يعنى مثلا لو عندنا مجموعه النقط : equal spaced

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

هنلاقى ان شكل القوانين بقى عامل كده

$$R(f) = (b-a)f(x_0)$$

$$= (b-a)f_0$$

$$M(f) = (b-a)f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$T(f) = \frac{b-a}{2} (f_0 + f_1) = \frac{h}{2} (f_0 + f_1)$$

h : difference between 2 points

$$S(f) = \frac{h}{6} [f_0 + 4f_1 + f_2]$$

Ex:

Let

$$f(x) = 1 + e^{-x} \sin 4x$$

Over interval $[0, 1]$, apply various quadratic formula

- Rectangular Rule

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ R(f) &= (1-0)f(0) = 1(1 + e^{-0} \sin 0) = 1 \end{aligned}$$

- Midpoint Rule

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &= \frac{1}{2} \\ M(f) &= (1-0)f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 1(1 + e^{-0.5} \sin 2) \\ &= 1.55152 \end{aligned}$$

- Trapezoidal Rule

$$\begin{aligned} T(f) &= \frac{1-0}{2} [f(0) + f(1)] \\ &= \frac{1}{2} [1 + 0.72159] = 0.86079 \end{aligned}$$

- Simpson's Rule

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1-0}{6} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right] \\ &= \frac{1}{6} [1 + 4(1.55152) + 0.72159] \\ &= 1.32128 \end{aligned}$$

2- Composite Rules

هنا بقى هيعيد نفس القوانين بس لو ال Interval كبيره فا هنقسمها ل subintervals صغيره و اتعامل مع كل subinterval لوحدها

ممكن استخدم اى قانون فى اى subinterval ولازم تكون ال data equal spaced وده هيكون شكل ال rules

Composite Rectangular Rule

$$I_{CR} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Composite Midpoint Rule

$$I_{CM} = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Important Note

فى حاله برضه انه مش قال شكل ال function و قال على ال points هنقسم ال Intervals على حسب ال points دى بحيث ان كل 3 points يبقوا مع بعض فى Interval واحده علشان يبقى عندى فيهم واحده هى ال midpoint لان لو خدت نقطتين بس و عايزه اجيب ال midpoint بتاعتهم هحتاج اجيب قيمه ال function عند ال Point دى و انا اصلا معنديش شكل ال function فا بالتالى لازم اخذ حاجه معروفه عندى

Composite Trapezoidal Rule

$$I_{CT} = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n)] + h \sum_{i=1}^{n-1} f_i$$

Composite Simpson's Rule

$$I_{CS} = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{n-1} + f_n]$$

Ex:

Consider

$$f(x) = 2 + \sin 2\sqrt{x}$$

On $[1, 6]$

Divide $[1, 6]$ into

$$[1,2], [2,3], [3,4], [4,5], [5,6]$$

Composite Rectangular:

$$I_{CR} = 1 * (2.909297 + 2.30807 + 1.683052 + 1.243 + 1.0287)$$

Composite Midpoint:

$$\begin{aligned} I_{CM} &= 1 * \left[f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f\left(\frac{9}{2}\right) + f\left(\frac{11}{2}\right) \right] \\ &= 2.638 + 1.97 + 1.43 + 1.108 + 1.00024 \end{aligned}$$

Composite Trapezoidal:

$$I_{CT} = \frac{1}{2} [f(0) + f(6)] + 1 * [f(2) + f(3) + f(4) + f(5)]$$

Composite Simpson's:

$$\begin{aligned} I_{CS} &= \frac{1}{3} \left[f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(2) + 4f\left(\frac{5}{2}\right) + 2f(3) + 4f\left(\frac{7}{2}\right) + 2f(4) + 4f\left(\frac{9}{2}\right) + 2f(5) \right. \\ &\quad \left. + 4f\left(\frac{11}{2}\right) + f(6) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{CS} &= \frac{1}{3} [f(1) + f(6)] + \frac{2}{3} [f(2) + f(3) + f(4) + f(5)] \\ &\quad + \frac{4}{3} \left[f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f\left(\frac{9}{2}\right) + f\left(\frac{11}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} [2.909 + 1.01735] + \frac{1}{3} [2.3080 + 1.683 + 1.243 + 1.028722] \\ &\quad + \frac{2}{3} [2.63 + 1.97 + 1.43 + 1.183177 + 1.00024140] \end{aligned}$$

$$= 0.654445 + 2.08768 + 5.44089 = 8.1830$$

Ex:

Integrate the following function using Quadrature formula

$$\int_0^1 1 + e^{-x} \cos 4x \, dx$$

$$I_R = (1 - 0)f(0)$$

$$= 1 + e^0 \cos 0 = 2$$

$$I_M = (1 - 0)f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 + e^{-\frac{1}{2}} \cos 2 = 0.7476$$

$$I_T = \frac{1}{2}[2 + (1 + e^{-1} \cos 4)]$$

$$= 0.5 [2 + 0.7595] = 1.3798$$

$$I_S = \frac{1}{6}[2 + 4f(0.5) + 0.7595]$$

$$= 0.9583$$

Ex:

Compute using composite formula:

$$\int_0^2 2x \cos x \, dx, \quad h = 0.5$$

We have to divide the interval $[0, 2]$ into subintervals that has a difference $= 0.5$

0	0.5	1	1.5	2
---	-----	---	-----	---

Since we have the function, then 'n' is the number of intervals, so $n = 4$

$$I_{CR} = 0.5 \sum_{i=0}^3 f(x_i)$$

$$= 0.5 [0 + 0.876 + 1.0806 + 0.2122]$$

$$= 1.0852$$

$$I_{CM} = 0.5 \sum_{i=0}^3 f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

$$= 0.5 \left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75) \right]$$

$$= 0.5 [0.4845 + 1.0975 + 0.7883 - 0.6239]$$

$$= 0.8732$$

$$I_{CT} = \frac{0.5}{2} [f(0) + f(2)] + 0.5 \sum_{i=1}^3 f(x_i)$$

$$= 0.6691$$

$$I_{CS} = \frac{0.5}{3} [f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + f(2)]$$

$$= 0.8093$$

Ex:

Calculate the integration of:

x	-2	0	2	4	6	8	10
F(x)	3.5	5	-10	2	5	3	20

If we have data points then 'n' is the number of points, so here we have n = 7

$$I_{CR} = 2 \sum_{i=0}^6 f(x_i)$$

$$= 2[3.5 + 5 - 10 + 2 + 5 + 3] = 57$$

$$I_{CM} = 4 \sum_{i=0}^3 f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

$$= 4[f_1 + f_3 + f_5] = 4[5 + 2 + 3] = 40$$

$$\begin{aligned}
 I_{CT} &= \frac{2}{2}(3.5 + 20) + 2 \sum_{i=1}^6 f(x_i) \\
 &= 23.5 + 2[5 - 10 + 2 + 5 + 3] \\
 &= 33.5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{CS} &= \frac{4}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6] \\
 &= 35.6667
 \end{aligned}$$

Ex:
Solve using composite

$$\int_0^4 x^2 e^{-x} dx, \quad h = 0.5$$

0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---

$$n = 8$$

$$\begin{aligned}
 I_{CR} &= 0.5 \sum_{i=0}^7 f(x_i) \\
 &= 1.59345
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{CM} &= 0.5 \sum_{i=0}^7 f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \\
 &= 0.25 [f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75) + f(2.25) + f(2.75) + f(3.25) + f(3.75)] \\
 &= 1.506
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{CT} &= 0.25[f(0) + f(4)] + 0.5 \sum_{i=1}^7 f(x_i) \\
 &= 1.5202
 \end{aligned}$$

$$I_{CS} = \frac{0.5}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + f_8]$$

$$= 1.5256$$

Ex:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx, \quad h = 0.5$$

-1	-0.5	0	0.5	1
----	------	---	-----	---

$$n = 4$$

$$I_{CR} = 0.5[f(-1) + f(-0.5) + f(0) + f(0.5)]$$

$$= 6.6$$

$$I_{CM} = 0.5[f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75)]$$

$$= 1.5812$$

$$I_{CT} = 0.25 [f(-1) + f(1)] + 0.5 [f(-0.5) + f(0) + f(0.5)]$$

$$= 1.55$$

$$I_{CS} = \frac{0.5}{3} [f(-1) + 4f(-0.5) + 2f(0) + 4f(0.5) + f(1)]$$

$$= 9.4$$

Errors Calculation in Newton – Cots Method

دلوقتی لما اجی احل integration معین هختار انهى طريقه ؟

فى الحقيقه انا لازم احل بالاربع طرق و اشوف نسبه ال Error فى كل واحده فيهم و بعدين اختار الطريقه اللى ليها اقل نسبه Error

لكل طريقه عندنا قانون لحساب ال Error فيها:

Error of Rectangular Rule

$$E_R = \frac{(b-a)^2}{2} M_1$$

$$M_1 = \max(f'(a), f'(b))$$

Error of Midpoint Rule

$$E_M = \frac{(b-a)^3}{24} M_2$$

$$M_2 = \max(f''(a), f''(b))$$

Error of Trapezoidal Rule

$$E_T = \frac{(b-a)^3}{12} M_2$$

Error of Simpson's Rule

$$E_S = \frac{(b-a)^5}{2880} M_4$$

$$M_4 = \max(f^{(4)}(a), f^{(4)}(b))$$

Errors Calculation in Composite Method

Error of Rectangular Rule

$$E_{CR} = \frac{M_1}{2} (B-A)h$$

Error of Midpoint Rule

$$E_{CM} = \frac{M_2}{24} (B-A)h^2$$

Error of Trapezoidal Rule

$$E_{CT} = \frac{M_2}{12} (B-A)h^2$$

Error of Simpson's Rule

$$E_{CS} = \frac{M_4}{180} (B-A)h^4$$

Summary of All Rules 😊

Exact Error

Let A be the Exact Solution and $A^{\sim}$ be the Approximated Solution then

$$\text{The Exact Error} = A - A^{\sim}$$

Absolute Error

$$|E| = |A - A^{\sim}|$$

Relative Error

$$E_R = \frac{|A - A^{\sim}|}{|A|}$$

Percentage Error

$$E_P = \frac{|A - A^{\sim}|}{|A|} * 100 \%$$

Infinite Geometric Series

$$\frac{a}{1-r}, r < 1$$

Number of significant decimal digits

$$\frac{|p - p'|}{p} \leq 0.5 * 10^{-d}$$

Fixed Point Iteration

Workability conditions:

- 1- $f(x)$ on set
- 2- $f(x)$ everywhere defined
- 3- $f(x)$ is a continues function

Convergence test:

$$|f'(x)| \leq k < 1$$

Rate of convergence:

$$n > \frac{(\log \frac{\epsilon_{0max}}{0.5} + d)}{\log \frac{1}{k}}$$

Iterating function

$$p_n = f(p_{n-1})$$

Bisection Method

Workability Conditions:

- 1- Continues Function
- 2- Sign $F(b) \neq \text{Sign } F(a)$
- 3- $[a, b]$ must contain single root

Rate of Convergence

$$n > \left\lceil \frac{\log|b - a| - \log(0.5 * 10^{-d})}{\log 2} \right\rceil - 1$$

Iterating function

$$c = \frac{a + b}{2}$$

False Position Method

Iterating function

$$C_n = b_n - \left[\frac{F(b_n)(b_n - a_n)}{F(b_n) - F(a_n)} \right]$$

Simple root

$$F'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$$

Convex and Concave Set

if $F''(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ Then the Function is Convex

else if $F''(x) < 0$ Then the Function is Concave

Newton Method

Workability Conditions

$$F(x) \in C_{[a,b]}^{(2)}$$

Iterating function

$$p_n = p_{n-1} - \frac{F(p_{n-1})}{F'(p_{n-1})}$$

Case 1:

- 1) $F'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ Simple root
- 2) Initial approximation is sufficiently close to the root

if $\gamma < 1$ then it's close

else if $\gamma > 1$ then it's not close

$$M = \text{Max} (|F''(a), F''(b)|)$$

$$m = \text{Min} (|F'(a), F'(b)|)$$

$$\delta = \frac{b - a}{2}$$

$$N \geq \frac{1}{\log 2} \left[\log \left[\frac{\log U^{-1} + \log \frac{2m}{M}}{\log \gamma^{-1}} \right] \right]$$

$$U = 0.5 * 10^{-d}$$

Case 2:

- 1) Multiple Root (Condition # 1 Failed)
- 2) $\gamma < 1$

Linear convergence

Case 3:

- 1) Simple Root
- 2) $\gamma > 1$
- 3) $F(x)$ is Convex or Concave

Linear-Quadratic convergence

Case 4:

1) Multiple Root

2) $\gamma > 1$

3) $F(x)$ is Convex or Concave

Linear convergence

Secant Method

$$\text{Iterating function } P_n = P_{n-1} - \left[\frac{F(P_{n-1})(P_{n-1} - P_{n-2})}{F(P_{n-1}) - F(P_{n-2})} \right]$$

Lagrange Method

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f_i = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + \dots + L_n(x) f_n$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0 \text{ \& } i \neq j}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Newton Method Case1: Equal Spaced "Forward Difference"

$$P_n(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2! h^2} \Delta^2 f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3! h^3} \Delta^3 f_0 + \dots$$

Newton Method Case: 2 Not Equal Spaced "Divided Difference"

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0) Df_0 + (x - x_0)(x - x_1) D^2 f_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) D^3 f_0 + \dots$$

$$D^j f_i = \frac{D^{j-1} f_{i+1} - D^{j-1} f_i}{x_{i+j} - x_i}$$

Basis Cubic Spline Method

$$C(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i B_i(x)$$

$$B_i(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4h^3} (x - x_{i-2})^3, & x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h} (x - x_{i-1}) + \frac{3}{4h^2} (x - x_{i-1})^2 - \frac{3}{4h^3} (x - x_{i-1})^3, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h} (x_{i+1} - x) + \frac{3}{4h^2} (x_{i+1} - x)^2 - \frac{3}{4h^3} (x_{i+1} - x)^3, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \frac{1}{4h^3} (x_{i+2} - x)^3, & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0, & \text{Otherwise} \end{array} \right\}$$

$$\alpha_n = b_n$$

$$\alpha_i = b_i - (a_i \alpha_{i+1})$$

$$a_0 = \frac{1}{4}$$

$$a_i = \frac{1}{4 - a_{i-1}}, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$b_0 = f_0$$

$$b_i = (4f_i - b_{i-1}) * a_i, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$b_n = \frac{4f_n - b_{n-1}}{4 - a_{n-1}}$$

$$a_0 = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{4}{15}$$

$$a_2 = \frac{15}{56}$$

$$a_3 = \frac{56}{209}$$

$$a_4 = \frac{209}{780}$$

$$a_5 = \frac{780}{2911}$$

Root Mean Square Error (RMS)

$$E_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Least Square Method “Fitting in Linear Line”

$$f(x) = Ax + B$$

$$\sum_{i=1}^N Ax_i^2 + B \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^N Ax_i + NB = \sum_{i=1}^N y_i$$

Power Fitting

$$f(x) = Ax^M$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^M y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^{2M}}$$

Exponential Form

$$y = C e^{Ax}$$

$$\ln y = \ln C + Ax$$

$$Y = \ln y$$

$$B = \ln C$$

Function $y = f(x)$	Linearization Form $Y = AX + B$	Change of Variables and Constants
$y = \frac{A}{x} + B$	$y = A \frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}, Y = y$
$y = \frac{D}{x + C}$	$y(x + C) = D$ $yx + yC = D$ $y = -\frac{1}{C}xy + \frac{D}{C}$	$X = xy$ $Y = y$ $A = -\frac{1}{C}, B = \frac{D}{C}$
$y = \frac{1}{Ax + B}$	$\frac{1}{y} = Ax + B$	$X = x, Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{A + Bx}$	$\frac{1}{y} = \frac{A + Bx}{x}$ $\frac{1}{y} = A \frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}$ $Y = \frac{1}{y}$
$y = A \ln x + B$	$y = A \ln x + B$	$X = \ln x, Y = y$
$y = Ce^{Ax}$	$\ln y = Ax + \ln C$	$X = x, Y = \ln y, B = \ln C$
$y = Cx^A$	$\ln y = A \ln x + \ln C$	$X = \ln x, Y = \ln y, B = \ln C$
$y = (Ax + B)^{-2}$	$y^{-\frac{1}{2}} = Ax + B$	$X = x, Y = y^{-\frac{1}{2}}$
$y = Cxe^{-Dx}$	$\frac{y}{x} = Ce^{-Dx}$ $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = -Dx + \ln C$	$X = x, Y = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ $B = \ln C, A = -D$
$y = \frac{L}{1 + Ce^{Ax}}$	$\ln\left(\frac{L}{y} - 1\right) = Ax + \ln C$	$X = x, Y = \ln\left(\frac{L}{y} - 1\right)$ $B = \ln C$

Weighted Least Square Polynomial Approximation

$$V^t w V a = V^t w y$$

$$V_{(n+1) \times N}^t w_{N \times N} V_{N \times (n+1)} a_{(n+1) \times 1} = V_{(n+1) \times N}^t w_{N \times N} y_{N \times 1}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_4 \\ \mathbf{y}_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\mathbf{R}_E}$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{(\mathbf{RMS})^2}$$

Newton – Cots Quadrature Formula Case 1: we have the function

Rectangular Rule:

$$\mathbf{R}(\mathbf{f}) = (\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{f}(\mathbf{a})$$

Midpoint Rule:

$$\mathbf{M}(\mathbf{f}) = (\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}\right)$$

Trapezoidal Rule:

$$\mathbf{T}(\mathbf{f}) = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}(\mathbf{b})]$$

Simpson's Rule:

$$\mathbf{S}(\mathbf{f}) = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{6} \left[\mathbf{f}(\mathbf{a}) + 4\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{b} + \mathbf{a}}{2}\right) + \mathbf{f}(\mathbf{b}) \right]$$

Quadrature Formula Case 2: we have data points “Equal Spaced”

Rectangular Rule:

$$\mathbf{R}(\mathbf{f}) = (\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{f}_0$$

Midpoint Rule:

$$\mathbf{M}(\mathbf{f}) = (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0)\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_0}{2}\right)$$

Trapezoidal Rule:

$$T(f) = \frac{h}{2} [f_0 + f_n]$$

Simpson's Rule:

$$S(f) = \frac{h}{6} [f_0 + 4f_1 + f_2]$$

Errors Calculation in Newton – Cots Quadrature Method

Error of Rectangular Rule

$$E_R = \frac{(b-a)^2}{2} M_1$$

$$M_1 = \max(f'(a), f'(b))$$

Error of Midpoint Rule

$$E_M = \frac{(b-a)^3}{24} M_2$$

$$M_2 = \max(f''(a), f''(b))$$

Error of Trapezoidal Rule

$$E_T = \frac{(b-a)^3}{12} M_2$$

Error of Simpson's Rule

$$E_S = \frac{(b-a)^5}{2880} M_4$$

$$M_4 = \max(f^{(4)}(a), f^{(4)}(b))$$

Composite Formula

Rectangular Rule:

$$I_{CR} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Midpoint Rule:

$$I_{CM} = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Trapezoidal Rule:

$$I_{CT} = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n)] + h \sum_{i=1}^{n-1} f_i$$

Simpson's Rule:

$$I_{CS} = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{n-1} + f_n]$$

Errors Calculation in Composite Method

Error of Rectangular Rule

$$E_{CR} = \frac{M_1}{2} (B - A)h$$

Error of Midpoint Rule

$$E_{CM} = \frac{M_2}{24} (B - A)h^2$$

Error of Trapezoidal Rule

$$E_{CT} = \frac{M_2}{12} (B - A)h^2$$

Error of Simpson's Rule

$$E_{CS} = \frac{M_4}{180} (B - A)h^4$$

اللهم انى استودعك ما فهمت وما حفظت فرده إلى عند حاجتى إليه

Done

With All My BEST Wishes

Lo2Lo2a