



مبادئ التحليل الرياضي (٢٣٢) - حلول اختبار (٣)
مايو ٢٠٠٩

السؤال الأول

حدد ما إذا كانت كل من العبارات التالية صحيحة أم خاطئة مع إثبات ما تقول.

(أ) إذا كانت $f(t)$ متصلة على $[1, +\infty[$ وتحقق $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ وكانت $g(t)$ دالة تحقق $\left| \int_1^c g(t) dt \right| \leq M$ لكل $c > 1$ حيث M ثابت، فإن $\int_1^{+\infty} f(t)g(t) dt$ تقاربي.
الحل: (خطأ) مثال: نأخذ $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ و $g(t) = \sin t$ فنجد أن الشروط المعطاة متحققة لكن $\int_1^{+\infty} f(t)g(t) dt$ لا يحقق شرط كوشي حيث:

$$\int_{(2^n+1)\pi}^{(2^{m+1}+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^m} \int_{k\pi+\pi/4}^{k\pi+3\pi/4} \frac{\sin^2 t}{t} dt \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^m} \frac{1}{4k} \geq \frac{m-n}{8}$$

(ب) إذا كانت $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابة من الأعداد الموجبة، وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ فإن $\sum u_n$ تقاربية.

الحل: (خطأ) مثال: نأخذ $u_n = 1$ لكل n فنجد أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ لكن المتسلسلة $\sum u_n$ تباعدية لأن حدها العام لا يؤول للصفر.

(ج) المتسلسلة $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{a^n}$ تقاربية لكل $a \in [\frac{1}{4}, +\infty[$
الحل: (خطأ) عند $a = \frac{1}{4}$ نحسب نهاية الحد العام:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)(2n-2) \cdots 4.2)((2n)(2n-2)(2n-4) \cdots 4.2)}{(2n)(2n-2) \cdots 4.2((2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 3.1)} = 1 \neq 0$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تباعدية.

(د) المتسلسلة $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ تقاربية.
الحل: (صحيحة) بالمقارنة مع $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ نجد أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n / n^2}{1/n^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}} = 0$$

وحيث أن $\sum b_n$ تقاربية لأن $3/2 > 1$ ، فإن $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ تقاربية (إختبار المقارنة بالرتبة).

السؤال الثاني

(أ) برهن أن $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx$ تقاربي لأي $t \in \mathbb{R}_+$. **الحل:** نضع $f(x) = e^{-tx}$, $g(x) = \sin x$
فنجد أن f تناقصية ومتصلة وتحقق $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، كما أن $\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq 2$ لأي a, b فينتج من اختبار آبل - ديريكليه أن التكامل تقاربي.

(ب) إدرس تقارب المتسلسلة $\sum_n u_n$ حيث $u_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin x \, dx$ **الحل:** لحساب قيمة التكامل:

$$\begin{aligned} \int_0^L e^{-tx} \sin x \, dx &= \int_0^L e^{-tx} \sin x \, dx = -e^{-tL} \cos L + 1 - t \int_0^L e^{-tx} \sin x \, dx \\ &= 1 - e^{-tL} \cos L - t e^{-tL} \sin L - t^2 \int_0^L e^{-tx} \sin x \, dx \quad \text{بالتجزئة مرتين} \\ \int_0^L e^{-tx} \sin x \, dx &= \frac{1}{1+t^2} (1 - e^{-tL} \cos L - t e^{-tL} \sin L) \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x \, dx = \frac{1}{1+t^2}, \quad u_n = \frac{1}{1+n^2}$$

وباستخدام اختبار المقارنة مع $\frac{1}{n^2}$ نجد أن $u_n \leq v_n \, \forall n$ والمتسلسلة $\sum v_n$ تقاربية، إذن المتسلسلة $\sum u_n$ تقاربية.
