



مبادئ التحليل الرياضي (٢٣٢) - حلول اختبار (١)

السؤال الأول

بين أي من العبارات الآتية صحيح وأيها خطأ مع ذكر السبب باختصار

(١) إذا كانت كل من $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعتان تباعديتان فإن $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تباعدية.

الحل: (خطأ) مثال: لتكن $x_n = n$ و $y_n = -n$ ، من الواضح أن كل من $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تباعدية لكن $x_n + y_n = 0$ وبالتالي $(x_n + y_n)_n$ تقاربية.

من الحلول الخاطئة في إجابات الطلاب:

(١) خطأ لأن من نظرية جبر النهايات: مجموع متتابعتين تقاربيتين هو متتابة تقاربية،

وليس أن مجموع متتابعتين تباعديتين هو متتابة تباعدية. لا يمكن أن نقول أن العبارة خاطئة

لأن لدينا نظرية نقول شيء آخر، لابد أن يكون هناك تناقض صريح مع النظرية.

(٢) صحيحة لأنه إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ فإن

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = +\infty$. المتتابة التباعدية لانحقيق بالضرورة أن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. من الممكن أن تكون المتتابة متددة أو نؤول إلى $-\infty$ أو أي شيء آخر.

(ب) إذا كانت $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابة محدودة فإن لها متتابة جزئية تحقق شرط كوشي.

الحل: (صحيحة) من نظرية بولزانو - فايرشتراس: أي متتابة محدودة لها متتابة جزئية

تقاربية، وأي متتابة تقاربية تحقق شرط كوشي.

(ج) المتتابة $x_n = 3^{-n/2}(2 \sin((n + \frac{1}{3})\pi))^n$ تقاربية.

الحل: (خطأ) لأن $x_n = (-1)^{n^2} = (-1)^n$ ، وهي متتابة غير تقاربية.

من الحلول الخاطئة في إجابات الطلاب:

صحيحة لأن $3^{-n/2}$ تؤول للصفر و $\sin(n + 1/3)\pi$ محدودة. ما لدينا ليس $\sin(n + 1/3)\pi$

ولكن $(2 \sin(n + 1/3)\pi)^n$ وهي ليست محدودة.

(د) أي متتابة تناقصية ومحدودة من أعلى تكون تقاربية.

الحل: (خطأ) المتتابة $x_n = -n$ محدودة من أعلى بالصفر وتناقصية لكنها ليست تقاربية.

من الحلول الخاطئة في إجابات الطلاب:

العبارة خطأ لأن نظرية الاكتمال تنص على أن أي متتابة تناقصية ومحدودة من أسفل

تكون تقاربية. لا يوجد تناقض صريح بين خاصية الاكتمال والعبارة التي أمامنا.

السؤال الثاني

برهن أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ حيث $1 < a$. الحل: نأخذ $n_0 = \max([a] + 1, \frac{a^{[a]+1}}{\varepsilon([a]!)})$ فنجد أنه لأي $n > n_0$ يكون:

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{1} \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]} \frac{a}{([a] + 1)} \cdots \frac{a}{(n-1)} \frac{a}{n} \\ &\leq \frac{a^{[a]}}{[a]!} \frac{a}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

ومن تعريف النهاية نستنتج أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
 حل آخر: نلاحظ أن $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1}$ ومن السهل إثبات أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0$. من ذلك ينتج
 أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ لأنه بأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ يوجد n_0 بحيث

$$n > n_0 \implies \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \implies \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{2} \frac{a^n}{n!}$$

وبالاستنتاج الرياضي نجد أن

$$0 < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{2^{n-n_0-1}} \frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!}$$

ومن نظرية الحصر فإن هذا يعني أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
 من الحلول الخاطئة في إجابات الطلاب:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{n}$$

ومن جبر النهايات:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{2} \cdots \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0.$$

نظرية جبر النهايات تنطبق على حاصل ضرب عدد ثابت من المتتابعات، ما لدينا هنا هو عدد متغير من العوامل.
 فلا يمكن تطبيق نظرية جبر النهايات.