



مبادئ التحليل الرياضي (٢٣٢) - حلول اختبار (٢)
أبريل ٢٠٠٩

السؤال الأول

حدد ما إذا كانت كل من العبارات التالية صحيحة أم خاطئة مع إثبات ما تقول.

(أ) إذا كانت كل من $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعات من الأعداد الحقيقية وكانت $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تباعدية فإن $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية.
الحل: (خطأ) إذا كانت $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية فإن المتتابعة $y_n = (x_n + y_n) - x_n$ هي مجموع متابعتين تقاربيتين فلا بد أن تكون تقاربية.

(ب) إذا كانت $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة غير محدودة من أعلى فإن لها متتابعة جزئية تقاربية أو متتابعة جزئية تؤول إلى $+\infty$.
الحل: (صحيحة) لأن أي متتابعة غير محدودة من أعلى لها متتابعة تقاربية تؤول إلى $+\infty$ ، ويمكن إثبات ذلك مباشرة من التعريفات.

(ج) الدالة $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$ متصلة بانتظام على $[0, 1]$.
الحل: (صحيحة) لأننا لو وضعنا $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in]0, 1], \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ فإن g تكون متصلة على

الفترة المغلقة $[0, 1]$ وبالتالي فهي متصلة اتصال منتظم وذلك لأنه إذا كانت $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة كوشية في $[0, 1]$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ (من نظرية علاقة المتتابعات بالاتصال) وبالتالي فإن الصور تكون متتابعة كوشية. وحيث أن f هي قصر g على $[0, 1]$ فإنها تكون متصلة بانتظام على $[0, 1]$.

السؤال الثاني

برهن أن

$$\int_1^a \frac{1}{x(\ln x)^{1/n}} dx, \quad n > 1, a > 1.$$

تقاربي. ثم إدرس تقارب المتتابعة $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$s_n = \int_1^{e^n} \frac{1}{x(\ln x)^{1/n}} dx, \quad n > 1.$$

الحل: نأخذ $1 < b < a$ ونستخدم التعويض $u = \ln x$ ، فنجد

$$\begin{aligned} \int_b^a \frac{1}{x(\ln x)^{1/n}} dx &= \int_{\ln b}^{\ln a} \frac{1}{u^{1/n}} du \\ &= \frac{n}{n-1} u^{1-\frac{1}{n}} \Big|_{\ln b}^{\ln a} = \frac{n}{n-1} \left((\ln a)^{1-\frac{1}{n}} - (\ln b)^{1-\frac{1}{n}} \right) \end{aligned}$$

من تعريف التكامل المعتل نجد أن

$$\int_1^a \frac{1}{x(\ln x)^{1/n}} dx = \lim_{b \rightarrow 1+} \frac{n}{n-1} \left((\ln a)^{1-\frac{1}{n}} - (\ln b)^{1-\frac{1}{n}} \right) = \frac{n}{n-1} (\ln a)^{1-\frac{1}{n}}.$$

وبالتالي فإن التكامل تقاربي.

لدراسة تقارب المتتابة نضع $a = e^n$ في قيمة التكامل المعتل التي أوجدناها، فنحصل على:

$s_n = \frac{n}{n-1} n^{1-\frac{1}{n}}$. هذه المتتابة هي حاصل ضرب متتابتين: الأولى $x_n = \frac{n}{n-1}$ تتقارب إلى 1

، والثانية تحقق $y_n = n^{1-\frac{1}{n}} > n^{1/2}$ وبالتالي فإن $y_n \rightarrow +\infty$. من ذلك ينتج أن المتتابة $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تباعدية و:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty.$$
