

مبادئ التحليل الرياضي
مقرر ر ٢٣٢
مشروعات الأبحاث الطلابية (٢)

(١) الأسس المتتالية (Iterated exponentials)

المطلوب: دراسة المتتالية

$$a, a^a, a^{a^a}, \dots$$

ويقترح قراءة: Joel Anderson, *Iterated Exponentials*. The Amer. Math. Monthly, 111, pp. 668-679.

(٢) تعريف بعض الدوال باستخدام المتتابعات (Defining functions by sequences)

لتكن $a > 0$ ، نضع

$$u_n = n(a^{1/n} - 1)$$

يمكن إثبات أن المتتابة $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية، نسمي نهايتها $u(a)$. نثبت أيضاً أن

$$u(ab) = u(a) + u(b)$$

ومنه نستنتج أن الدالة $u(x)$ متصلة وتزايدية، في الحقيقة u هي دالة لوغاريتمية. المطلوب: برهن النتائج المذكورة عاليه، ثم أعط مثلاً آخر لدالة يمكن تعريفها بطريقة مماثلة.

(٣) تعريف الدوال بمعرفة قيمها على مجموعة جزئية كثيفة (Extension of functions from dense subsets)

لتكن $A \subset [a, b]$ ، نقول أن A مجموعة جزئية كثيفة من الفترة $[a, b]$ إذا كان كل عنصر في $[a, b]$ هو نهاية لمتتابة من عناصر A .
المطلوب:

(١) أعط أمثلة على مجموعات جزئية كثيفة من $[0, 1]$.

(٢) لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجموعة جزئية كثيفة من $[a, b]$ ، برهن أنه إذا كانت f متصلة بانتظام على A فإنه يوجد دالة متصلة وحيدة $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تحقق أن $g(x) = f(x)$ لكل $x \in A$.

(٣) بين أن شرط الاتصال المنتظم لا يمكن إسقاطه في الفقرة السابقة.

(٤) المتسلسلات والتقريب (Approximation by series)

المطلوب: دراسة استخدام المتسلسلات في إيجاد قيم تقريبية لبعض الأعداد.

(٥) سرعة التقارب (Speed of Convergence)

المطلوب: كيف نقيم سرعة تقارب متسلسلة؟ وكيف نزيد من سرعة التقارب.

(٦) جمع المتسلسلات التباعدية (Divergent Series and Summability)

المطلوب: ابتكر علماء الرياضيات طرقاً لحساب مجموع لبعض المتسلسلات التباعدية. إدرس بعض هذه الطرق.

(٧) المتسلسلة التوافقية العشوائية (Random harmonic series)

لتكن $\epsilon_k(t) = \text{sgn}(\sin(2^k \pi t))$ ، نضع

$$X(t) = \sum \frac{\epsilon_k(t)}{k}$$

المطلوب: إدرس تقارب هذه المتسلسلة وتوزيع المتغير العشوائي X .

يقترح قراءة: The Amer. Math. Monthly, 110, pp. 407-416.
Byron Scmuland, *Random Harmonic Series*.

(٨) متسلسلات فورييه (Fourier Series)

المطلوب: ما هي متسلسلات فورييه وكيف ندرس تقاربها.

ويمكن البدء بالاستعانة بالمواقع العامة الآتية:

<http://planetmath.org>

<http://mathworld.wolfram.com>

<http://en.wikipedia.org/wiki/>