



كلية العلوم

قسم الرياضيات

مبادئ التحليل الرياضي (٢٣٢) - واجب (٤)
يسلم يوم الثلاثاء ١٩ مايو ٢٠٠٩

السؤال الأول

إدرس تقارب المتسلسلات التالية:

(أ) $\sum_k \frac{(\ln k)^\alpha}{k^{1+\alpha/4}}$ ، $\alpha > 0$

(ب) $\sum_n \sec^2\left(\frac{1}{n^2+1}\right) \tan\left(\frac{\pi}{2n^2+3}\right)$

(ج) $\sum_n \frac{\cos(3n\pi)(n!)^3}{(3n)!}$

السؤال الثاني لتكن $s, t > 0$ و $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الموجبة تحقق أن $\sum_n n^2 a_n^2$ تقاربة.

(أ) برهن أن $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{s+tx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{st}}$

(ب) استنتج أن

$$\sum_n \frac{1}{s+tn^2} < \frac{\pi}{2\sqrt{st}}$$

(ج) استخدم متباينة كوشي شوارتز:

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{1/2}$$

لتستنتج أن

$$\left(\sum_n a_n \right)^2 \leq (As + Bt) \sum_n \frac{1}{s+tn^2}$$

حيث $A = \sum_n a_n^2$ و $B = \sum_n n^2 a_n^2$

(د) باستخدام ماسبق برهن أن

$$\left(\sum_n a_n \right)^4 < \pi^2 \left(\sum_n a_n^2 \right) \left(\sum_n n^2 a_n^2 \right)$$