



مبادئ التحليل الرياضي (٢٣٢) - حلول واجب (٣)
يسلم يوم الثلاثاء ٢٨ أبريل ٢٠٠٩

السؤال الأول

إدرس تقارب التكاملات التالية:

$$(أ) \int_0^{e^{10}} \frac{1}{x^\alpha \ln^2(\ln x)} dx, \alpha > 0$$

الحل: الدالة $\ln(\ln x)$ غير معرفة في الفترة $[0, 1]$ وبالتالي فالتكامل $\int_0^{e^{10}} \frac{1}{x^\alpha \ln^2(\ln x)} dx$ غير موجود.

$$(ب) \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^x dx, t \in \mathbb{R}$$

الحل: ندرس كلاً من التكاملين

$$I_1 = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^x dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^x dx$$

لأي $t \in \mathbb{R}$ نجد أن التكامل I_2 تباعدي وذلك بالمقارنة مع $g(x) = e^{x/2}$ (لأن $x^{t-1} \geq e^{-x/2}$ لأي $x \gg 1$).
التكامل I_1 إما تقاربي وموجب، أو يتباعد إلى $+\infty$. وبالتالي فإن التكامل $I_1 + I_2$ تباعدي في جميع الحالات.

$$(ج) \int_1^{+\infty} x^{-\alpha} \sin(x^\beta) dx, \alpha, \beta > 0$$

الحل: دراسة التقارب المطلق: عندما $\alpha > 1$ يكون التكامل تقاربياً تقارباً مطلقاً لأن

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx \quad , \quad |x^{-\alpha} \sin(x^\beta)| \leq x^{-\alpha} \quad \text{تقاربي.}$$

ومن اختبار المقارنة ينتج المطلوب.

في حالة $\alpha \leq 1$ نأخذ $t = x^\beta$ فنجد لأي $L > 1$:

$$\int_1^L |x^{-\alpha} \sin(x^\beta)| dx = \frac{1}{\beta} \int_1^{L^\beta} \left| t^{-\frac{(\alpha+\beta-1)}{\beta}} \sin(t) \right| dt$$

كما أن

$$\alpha \leq 1 \implies \frac{(\alpha + \beta - 1)}{\beta} \leq 1 \implies t^{-\frac{(\alpha+\beta-1)}{\beta}} \geq t^{-1}$$

فينتج أن

$$\left| t^{-\frac{(\alpha+\beta-1)}{\beta}} \sin(t) \right| \geq |t^{-1} \sin t|$$

ونستطيع إثبات أن $\int_1^{+\infty} |t^{-1} \sin t| dt$ تباعدي بالطريقة التي شرحناها في المحاضرة. فينتج من اختبار المقارنة أن $\int_1^{+\infty} \left| t^{-\frac{(\alpha+\beta-1)}{\beta}} \sin(t) \right| dt$ تباعدي.
النتيجة: التكامل $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} \sin(x^\beta) dx$ يتقارب تقارباً مطلقاً إذا وفقط إذا كان $\alpha > 1$.

دراسة التقارب المشروط: سنبدأ بمحاولة تطبيق اختبار آبل - ديريكليه. ونستخدم التعويض $t = x^\beta$ فنجد أنه عندما $\alpha + \beta > 1$ تكون الدالة $h(t) = t^{-\frac{(\alpha+\beta-1)}{\beta}}$ تناقصية وموجبة ومتصلة ونؤول إلى الصفر عند $+\infty$. كما أن

$$\left| \int_a^b \sin t dt \right| \leq 2 \quad \forall a, b$$

وبالتالي فإن شروط اختبار آبل - ديريكليه منطبقة. فيكون التكامل تقاربياً. بينما إذا كانت $\alpha + \beta \leq 1$ فإن

$$\left| \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} t^{-\frac{(\alpha+\beta-1)}{\beta}} \sin(t) dt \right| \geq (2k\pi)^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\beta}} \not\rightarrow 0$$

بالتالي فإن شرط كوشي غير متحقق. فيكون التكامل نباعدياً. النتيجة: التكامل $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} \sin(x^\beta) dx$ يتقارب تقارباً مشروطاً إذا وفقط إذا كان $\alpha \leq 1, \alpha + \beta > 1$.

السؤال الثاني

برهن:

إذا كانت f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ، وكان التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ تقاربياً تقارباً مطلقاً، فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

الحل: من أين أتت $\frac{2}{\pi}$? نلاحظ أن

$$\int_0^1 \sin \pi s ds = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}.$$

نتيجة مساعدة: لأي دالة متصلة f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) |\sin(n\pi t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(t) dt.$$

يمكن إثبات هذه النتيجة باستخدام التعويض $u = t/n$ ونظرية القيمة المتوسطة للتكامل.

حساب التكامل: لنكن $M, L \in \mathbb{N}$

$$\int_{-L\pi}^{M\pi} f(x) |\sin nx| dx = \pi \int_{-L}^M f(s\pi) |\sin n\pi s| ds$$

بأخذ $x = \pi s$

$$= \pi \sum_{k=-L}^M \int_k^{k+1} f(s\pi) |\sin n\pi s| ds$$

$$= \pi \sum_{k=-L}^M \int_0^1 f((t+k)\pi) |\sin n\pi t| dt$$

بأخذ $s = t + k$. ومن ذلك ينتج:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L\pi}^{M\pi} f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \left(\pi \sum_{k=-L}^M \int_0^1 f((t+k)\pi) dt \right)$$

من النتيجة المساعدة

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_{-L\pi}^{M\pi} f(x) dx \right)$$

وبجعل $L, M \rightarrow +\infty$ ينتج المطلوب.
