



كلية العلوم

قسم الرياضيات

مبادئ التحليل الرياضي (٢٣٢) - ملخص حلول واجب (١)

السؤال الأول

برهن من تعريف التقارب أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{5n^2 - 3n + 4} = \frac{3}{5}$$

الحل: نبدأ بحساب

$$\left| \frac{3n^2 + 1}{5n^2 - 3n + 4} - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{9n - 7}{25n^2 - 15n + 20} \right|$$

فلاحظ أن

$$0 < 9n - 7 < 9n, \quad 25n^2 - 15n + 20 > 10n^2 \quad \mathbb{N} \ni n \text{ لأي}$$

وبالتالي:

$$n \in \mathbb{N} \text{ لأي } n_0 = \left[\frac{9}{10\varepsilon} \right] \text{ نختار } \varepsilon > 0 \text{ أعطينا}$$

$$n > n_0 \implies n > \frac{9}{10\varepsilon} \implies \frac{9}{10n} < \varepsilon \implies \left| \frac{3n^2 + 1}{5n^2 - 3n + 4} - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon.$$

وهو المطلوب

ثم أكتب برهاناً آخر معتمداً على نظريات جبر النهايات. **الحل:** نثبت أولاً أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$. ثم نقسم البسط والمقام في $\frac{3n^2+1}{5n^2-3n+4}$ على n^2 فنجد

$$\frac{3n^2 + 1}{5n^2 - 3n + 4} = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{5 - 3\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}$$

ومن نظريات جبر النهايات، حيث أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{n^2} = 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 5 - 3\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} = 5 - 3 \times 0 + 4 \times 0 = 5 \neq 0$$

ينتج أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{5n^2 - 3n + 4} = \frac{3}{5}.$$

السؤال الثاني

أوجد نهاية كل من المتتابعات:

$$x_n = \frac{n^3 + n - 1}{n^2 + 3n^3 - 5},$$

الحل: بقسمة البسط والمقام على n^3 واستخدام نظريات جبر النهايات ينتج أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n - 1}{n^2 + 3n^3 - 5} = \frac{1}{3}$$

$$y_n = \frac{2^n + (-2)^n}{3^n},$$

الحل: نبرهن أولاً أن $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ لأي $a : |a| > 1$. من ذلك ينتج أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n = 0 + 0 = 0.$$

$$u_n = \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!}, m \in \mathbb{N}^*,$$

الحل: بأخذ $n > m$ نجد أن $u_n = 0$ لأن $m - k = 0$ عندما $k = m + 1$. وبالتالي فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

حل آخر: نثبت أولاً أنه لأي متتابعة $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من الأعداد الحقيقية الموجبة:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

ثم نلاحظ أن للمتتابعة المعطاة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

$$v_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 5}}$$

الحل: نضع $q_n = v_n^2$. ونثبت (بالقسمة في كل من البسط والمقام على n^2 ثم استخدام نظريات جبر النهايات) أن $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$. بالتالي لو علمنا أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربة فإن جبر النهايات يعطينا

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n\right)^2$$

للتأكد أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربة نلاحظ أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة (بالواحد) ونازدة (من السهل إثبات ذلك باستخدام الاشتقاق).

حل آخر: لاحظ أن $n^2 < n^2 + 5 < (n + \sqrt{5})^2$ وبالتالي فإن

$$1 < v_n < \frac{n}{n + \sqrt{5}}$$

من السهل إثبات أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \sqrt{5}} = 1$ فينتج من نظرية الحصر أن $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$.

السؤال الثالث

إدرس اطراد المتتابعات التالية ثم أوجد نهايتها إن أمكن.

$$x_n = -2\sqrt{n} + \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (١)$$

الحل: نوجد الفرق بين حدين متتاليين:

$$x_{n+1} - x_n = 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} = \frac{2\sqrt{n(n+1)} - 2(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{n+1}} < 0$$

وبالتالي فإن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية.

باستخدام الاستنتاج الرياضي يمكن إثبات أن $x_n > -3$ ، أي أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة من أسفل. حيث أن المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية ومحدودة من أسفل فإنها تكون تقاربة

$$y_n = -2\sqrt{n+1} + \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (٢)$$

الحل: متتابعة نزائدية ومحدودة من أعلى (بالصفر) وذلك مثل المسألة السابقة. كما يمكن أن ندرس هاتين المسألتين سوياً بأن نلاحظ أن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - y_n = 0$ وأن $y_n < x_n$ لكل n . وبالتالي فإن المتابعتين تتقاربان لنفس النهاية.

$$z_n = \cos(2^n) \quad (٣)$$

الحل: ليست نزائدية ولا تناقصية. لإثبات ذلك نلاحظ أن $z_{m+1} = 2z_m - 1$ وبالتالي فإن

$$z_{m+1} > z_m \iff 2z_m^2 - z_m - 1 > 0$$

المقدار التربيعي $2x^2 - x - 1$ يغير إشارته عند $1, -\frac{1}{2}$ ، وهو سالب عند 0 ، فيكون

$$z_{m+1} > z_m \iff z_m < -\frac{1}{2}$$

لكن $z_m = \cos 2^m < -\frac{1}{2}$ تكافئ $(2^m) \bmod(2n\pi) \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ ، وهو ما يقودنا للعلاقة

$$z_{m+1} > z_m \iff \left[\frac{3 \times 2^{m-1}}{\pi}\right] \equiv 1 \bmod 3$$

نظرية مساعدة: المجموعتان

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid \left[\frac{3 \times 2^{m-1}}{\pi}\right] \equiv 1 \bmod 3\}, \quad B = \{m \in \mathbb{N} \mid \left[\frac{3 \times 2^{m-1}}{\pi}\right] \equiv 2 \bmod 3\}$$

لا نهائيتان.

من هذه النظرية (التي يجب أن يحاول الطالب إثباتها) نجد أن هناك عدد لا نهائي من قيم m بحيث $z_{m+1} > z_m$ وعدد لا نهائي بحيث $z_{m+1} \leq z_m$. أي أن المتتابعة $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ليست مطردة مطلقاً. **حل أبسط:** من السهل إيجاد عدة قيم تكون فيها $z_{m+1} > z_m$ وقيم أخرى نحقق $z_{m+1} < z_m$ ، وهو ما يثبت أن المتتابعة ليست مطردة. لكننا في الحل السابق أثبتنا أنها ليست مطردة مطلقاً أي أنه لا يوجد m_0 بحيث تكون المتتابعة مطردة بعد الحد رقم m_0 .

$$u_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 3.1} \quad (٤)$$

الحل: بالحساب المباشر

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{2n+3} < 1.$$

وبالتالي فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية.

(هـ) $v_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{v_n}}$.
الحل: نلاحظ أن $v_{n+1}^2 - v_n^2 = \sqrt{v_n} - \sqrt{v_{n-1}}$ وبالتالي يكون

$$v_{n+1} \geq v_n \iff v_n \geq v_{n-1}$$

وذلك لأن $v_n > 0$ وكلما من دالتى الجذر والتربيع نزايدة على الأعداد الحقيقية الموجبة.

ينتج من ذلك أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تكون نزايدة إذا وفقط إذا كان $v_2 > v_1$ وهو ما يتحقق إذا وفقط إذا كان $0 \leq v_1 \leq 2$. كما تكون المتتابعة $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية إذا وفقط إذا كان $v_1 > 2$. وفي الحالتين تكون المتتابعة تقاربة.

السؤال الرابع أثبت أن المتتابعة

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}, \dots, \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

تحقق شرط كوشي للتقارب، ومن ذلك استنتج أنها تقاربية. ما هي نهاية هذه المتتابعة؟
الحل: أسهل الطرق هي ملاحظة أن

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

ومنه ينتج المطلوب.