

١-٥ - تمارين محلولة:
(١) إدرس تقارب المتتابعة

$$x_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

الحل نلاحظ أن $x_n = f(n)$ حيث $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. وبالتالي ندرس خاصية الانكماش للدالة f . بإيجاد المشتقة نجد أن

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}, \quad x \in [1, +\infty[, \quad \sup_{x \in [1, +\infty[} f'(x) = \frac{1}{2}.$$

ينتج من ذلك أن المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربة ونهايتها تحقق: $\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) = a$. هل نستطيع حل هذه المعادلة؟ ناقش ذلك.

(٢) أوجد حلاً تقريبياً للمعادلة $\cos x = x$ في الفترة $[0, \pi/2]$ بنسبة خطأ 10^{-10} .
الحل لندرس المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ:

$$x_0 = \pi/4, \quad x_{n+1} = \cos x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

نلاحظ أن مشتقة الدالة $f(x) = \cos x$ هي $\sin x$. لكن المشتقة لا تحقق العلاقة $\sup_{x \in [0, \pi/2]} |f'(x)| < 1$. وبالتالي لن تتمكن من التطبيق المباشر للطريقة الموجودة في تطبيق (٢). من ناحية أخرى نلاحظ أن $f(x)$ تناقصية. وأن $f(\pi/4) < \pi/4$. بالتالي فإن حل المعادلة وحيد في الفترة المعطاة ويوجد بالتأكيد بين 0 و $\pi/4$. في الفترة الصغيرة $[0, \pi/4]$ نجد أن المشتقة $\sin x$ نحقق الشرط $\sup_{x \in [0, \pi/2]} |\sin(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ وبالتالي يمكننا استخدام تطبيق (٢).

المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعطاة نتقارب إلى حل المعادلة a . يمكننا إذن أن نجد حداً x_{n_0} بحيث لأي $n > n_0$ تكون المسافة بين x_n وحل المعادلة أقل من 10^{-10} . كيف نجد n_0 ؟
من النتيجة الموجودة في التطبيق المذكور نعلم أن

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{حيث} \quad |x_n - a| < \frac{c^{n-1}}{1-c}$$

$$\text{نوجد } n_0 \text{ بحيث } \frac{c^{n_0-1}}{1-c} < 10^{-10}, \text{ أي}$$

$$\frac{1}{2^{(n_0-2)/2}(\sqrt{2}-1)} < 10^{-10}$$

هل يمكن أن نحصل بنفس الطريقة على حل تقريبي للمعادلة بحيث يكون الخطأ المطلق أقل من 10^{-30} ؟

نتوقف الإجابة على هذا السؤال على طريقة حساب $\cos x$. فلإيجاد حدود المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نحتاج لحساب $\cos x_k$ عدد n من المرات. وعادة ما نستخدم طريقة تقريبية أو جهاز حاسب لإيجاد هذه القيم، وهو ما يضيف خطأ التقريب في حساب الدالة إلى خطأ التقريب في حل المعادلة. إذا كان خطأ التقريب في حساب الدالة أكبر من الخطأ المطلق المطلوب فمن المستحيل إيجاد حل تقريبي يلبي الشروط. كما أن خطأ الحساب يتكرر في كل خطوة ولذلك يجب أن يكون أقل من حيث الدرجة من نسبة الخطأ المطلوبة حتى لا يؤثر على النتيجة النهائية.

(٣) إدرس تقارب المتتابعة المعرفة بالعلاقات:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 + x_n}, n \in \mathbb{N}.$$

الحل من الواضح أن $1 \leq x_n < 2$ لكل n . لذلك سندرس الدالة $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ على الفترة $[1, 2]$.

بالاشتقاق: $\frac{1}{(1+x)^2} < \frac{1}{4}$ لأي $x \in [1, 2]$. وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل يكون لدينا

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{4} |x_n - x_{n-1}|.$$

وكما رأينا في تطبيق (١) و (٢) فإن هذا يؤدي إلى أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نحقق شرط كوشي، فتكون بالتالي تقاربة لعدد حقيقي a .

لإيجاد قيمة النهاية: نلاحظ أن $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n+2}{x_n+1} = \frac{a+2}{a+1}$ أي أن $a(a+1) = a+2$ وهو ما يعطي الحل الموجب $a = \sqrt{2}$.

أبعد $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نعطي تقريبات قياسية للعدد $\sqrt{2}$ وذلك بمقدار خطأ $\epsilon_n = (1/4)^{n-1}/(3/4)$ $|x_1 - x_0| = \frac{2}{3}(1/4)^{n-1}$

(٤) إدرس تقارب المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعطاة بالعلاقة

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n - 3}{2x_n - 1}, n \in \mathbb{N}.$$

الحل نضع $f(x) = \frac{2x-3}{2x-1}$ ونوجد المشتقة:

$$f'(x) = \frac{4}{(2x-1)^2}.$$

نلاحظ أن $1 < \frac{16}{25} \leq |f'(x)|$ لأي $x \leq \frac{7}{4}$. قد بدعونا ذلك لتوقع أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نحقق شرط كوشي، لكننا بحساب بعض الحدود نجد أن

$$x_0 = 2, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = 7, \quad x_3 = \frac{11}{13}, \quad x_4 = -\frac{17}{9}, \dots$$

علام يدل هذا؟ نظهر هذه الحدود أن الدالة f ليست دالة من الفترة $[\frac{7}{4}, +\infty)$ إلى نفس الفترة. أي أنه رغم أن $x_0 \geq \frac{7}{4}$ فإن $x_1 < \frac{7}{4}$ ورغم أن $x_2 \geq \frac{7}{4}$ فإن x_3 ليست في نفس الفترة. بالتالي لن نتمكن من تطبيق الطريقة السابقة.

في الواقع المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تباعدية، وذلك لأننا لو فرضنا أنها تقاربة ونهايتها هي $a \in \mathbb{R}$ فإن $\frac{2a-3}{2a-1} = a$ أي أن a هي حل للمعادلة $2x^2 - x + 3 = 0$. لكن مميز المقدار التربيعي $2x^2 - x + 3$ سالب وبالتالي فهذه المعادلة ليس لها حلول حقيقية.