

٦.٣ اشتقاق الدوال ذات القيم المتجهة والتحويلات - قاعدة السلسلة

لا يقتصر مفهوم الاشتقاق على الدوال ذات القيم الحقيقية وإنما يمكن أيضاً دراسة اشتقاق الدوال ذات القيم المتجهة. ونقصد بالدوال ذات القيم المتجهة تلك الدوال التي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}^M$ حيث $M \geq 1$.

أول أمثلة الدوال من هذا النوع هي الدوال التي تُعرّف منحنيات بارامترية، فكما رأينا سابقاً يُعطى المنحنى بارامترياً بدالة $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، وقد تعاملنا مع مشتقة تلك الدالة (وهي دالة في متغير واحد وذات قيم متجهة) عند حساب طول المنحنى:

$$\int_a^b \|F'(t)\| dt$$

الدوال ذات القيم المتجهة هي ببساطة متجه من الدوال ذات القيم الحقيقية، كما يوضح التعريف التالي:

٦.٣-١-تعريف: إذا كانت $F : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ دالة معرفة على مجموعة $A \subset \mathbb{R}^N$ وذات قيم في $\mathbb{R}^M$ حيث $N, M \in \mathbb{N}^*$ فإننا نقول أن F دالة ذات قيم متجهة في N من المتغيرات. وفي هذه الحالة يكون

$$F(P) = (f_1(P), \dots, f_M(P)), \quad \forall P \in A$$

$$f_k : A \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall k, 1 \leq k \leq M \text{ حيث}$$

وتسمى الدوال $f_1, \dots, f_M$ بمركبات الدالة F .

٦.٣-٢-أمثلة:

(١) لتكن F معرفة بالعلاقة $F(x, y) = (3x + y, x - 2y, 2x + 5y)$ ، مركبات هذه الدالة هي

$$f_1(x, y) = 3x + y, \quad f_2(x, y) = x - 2y, \quad f_3(x, y) = 2x + 5y$$

(٢) لتكن $F(x, y, z) = (xy \sin z, yz \sin x, xz \sin y)$ ، $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ، مركبات هذه الدالة هي

$$f_1(x, y, z) = xy \sin z, \quad f_2(x, y, z) = yz \sin x, \quad f_3(x, y, z) = xz \sin y$$

(٣) لتكن $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ معرفة بالمركبتان:

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta(x, y) = \begin{cases} \arctan(y/x), & x, y > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi/2, & x \leq 0, y > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, & x, y < 0, \\ \arctan(y/x) + 3\pi/2, & x > 0, y < 0. \end{cases}$$

تسمى هذه الدالة بدالة التحويل من الإحداثيات الكاريزية للإحداثيات القطبية.

(٤) لتكن $G :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ هي الدالة $G(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. هذه الدالة تعطي التحويل من الإحداثيات القطبية للإحداثيات الكارتيكية.

(٥) لتكن $S :]0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$

هي الدالة $S(r, \theta, \phi) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$

نسمى هذه الدالة بدالة التحويل من الإحداثيات الكروية للإحداثيات الكارتيكية.

(٦) الدالة $C : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$

معرفة بالمركبات $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta(x, y, z) = \theta(x, y)$ (كما في الإحداثيات القطبية المستوية) و $z(x, y, z) = z$ نسمى دالة التحويل من الإحداثيات الكارتيكية للإحداثيات الاسطوانية.

دراسة الدوال ذات القيم المتجهة تنحصر بشكل كبير في دراسة مركباتها ، ويظهر هذا من التعريف والنظرية الآتية:

٦.٣-٣-تعريف: لتكن $F : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ، ولتكن $P_0 \in A$ ،
نقول أن F متصلة عند P_0 إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث
$$\forall P \in A : d_e(P, P_0) < \delta \implies d_e(F(P), F(P_0)) < \varepsilon$$

٦.٣-٤-نظرية: لتكن $F : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ، ولتكن $F = (f_1, \dots, f_M)$ ،
إتصال الدالة F عند نقطة $P_0 \in A$ يكافئ إتصال كل من الدوال f_k عند P_0 .

برهان - $\implies$ نفرض أن F متصلة عند P_0 ، بالتالي لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\forall P \in A : d_e(P, P_0) < \delta \implies d_e(F(P), F(P_0)) < \varepsilon$$

نلاحظ أن $|f_k(P) - f_k(P_0)| \leq d_e(F(P), F(P_0))$ فنستنتج

$$\forall P \in A : d_e(P, P_0) < \delta \implies |f_k(P) - f_k(P_0)| < \varepsilon$$

أي أن f_k متصلة عند P_0 .

$\Leftarrow$ نفرض أن f_k متصلة عند P_0 لكل k ، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى ، يوجد $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_M > 0$ بحيث

$$\forall P \in A : d_e(P, P_0) < \delta_k \implies |f_k(P) - f_k(P_0)| < \varepsilon / \sqrt{M}$$

بأخذ $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_M)$ نجد أن

$$\forall P \in A : d_e(P, P_0) < \delta_k \implies d_e(F(P), F(P_0)) = \sqrt{\sum_{k=1}^M |f_k(P) - f_k(P_0)|^2}$$

$$< \sqrt{\sum_{k=1}^M \varepsilon^2 / M} = \varepsilon$$

وهو ما يثبت أن $\mathbf{F}$ متصلة عند P_0 .

لاشتقاق دالة ذات قيم متجهة نشتق كل مركبة على حدة ثم نضع المشتقات على صورة مصفوفة كما نرى في:

٦.٣-٥- تعريف:

(أ) لتكن $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ و $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_M)$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A ، إذا كانت المشتقات الجزئية $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(P_0)$ موجودة لكل k عند P_0 فإن المنتج

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(P_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(P_0), \dots, \frac{\partial f_M}{\partial x_j}(P_0) \right)$$

يسمى منتج المشتقة الجزئية للدالة $\mathbf{F}$ عند P_0 .

(ب) إذا كانت المشتقات الجزئية للدالة $\mathbf{F}$ موجودة لكل $j = 1, \dots, N$ فإن المصفوفة

$$J(\mathbf{F})(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(P_0) \end{pmatrix}$$

تسمى مصفوفة المشتقات أو مصفوفة جاكوبي للدالة $\mathbf{F}$ عند P_0 .

٦.٣-٦- أمثلة:

(أ) لتكن $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - 2y + 3z, 4x + y - 5z)$. مصفوفة جاكوبي لهذه الدالة هي مصفوفة المعاملات

$$J(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

(ب) لتكن $\mathbf{F}(x, y)$ هي دالة التحويل من الإحداثيات الكارتيزية للإحداثيات القطبية في المستوى المعطاة في ٣ ، مصفوفة جاكوبي تعطى بالعلاقة

$$J(\mathbf{F})(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

٦.٣-٧-تعريف: لتكن $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A ، نقول أن $\mathbf{F}$ قابلة للاشتقاق عند P_0 إذا وجدت مصفوفة S بحيث

$$\mathbf{F}(P) = \mathbf{F}(P_0) + S(P - P_0) + \phi(P)$$

وكانت $\phi(P)$ تحقق

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\|\phi(P)\|}{\|P - P_0\|} = 0$$

مغزى هذا التعريف أن القابلية للاشتقاق تعني إمكان تقريب الدالة بدالة خطية في جوار النقطة P_0 .

من السهل ملاحظة أنه إذا كانت $\mathbf{F}$ قابلة للاشتقاق عند P_0 فإن المشتقات الجزئية للدالة $\mathbf{F}$ والمشتقات الجزئية للدالة $L = S(P - P_0)$ تتفقان عند P_0 ، وبالتالي فإن $J(\mathbf{F})(P_0) = S$ أي أن تعريف القابلية للاشتقاق يمكن إعادة كتابته على الصورة

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\|\phi(P)\|}{\|P - P_0\|} = 0$$

$$\phi(P) = \mathbf{F}(P) - [\mathbf{F}(P_0) + J(\mathbf{F})(P_0)(P - P_0)] \text{ حيث}$$

من السهل إثبات أن القابلية للاشتقاق تعتمد فقط على مركبات الدالة، وهو ما توضحه النظرية الآتية

٦.٣-٨-نظرية: تكون الدالة ذات القيم المتجهة قابلة للاشتقاق عند نقطة إذا وفقط إذا كانت كل مركباتها قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

٦.٣-٩-أمثلة:

$$(١) \text{ لتكن } \mathbf{F}(x, y) = (x + y, x - y) \text{، نجد أن}$$

$$J(\mathbf{F})(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

بالتالي فإن هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند أي نقطة في $\mathbb{R}^2$.

$$(٢) \text{ لتكن } \mathbf{F}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \text{، حيث } r > 0 \text{ و } \theta \in [0, 2\pi[\text{، نجد أن}$$

$$J(\mathbf{F})(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

من الواضح أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في نطاقها.

ننتقل الآن للصورة العامة لقاعدة السلسلة

٦.٣-١٠ - نظرية - قاعدة السلسلة للدوال ذات القيم المتجهة: لتكن $F : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ و $G : B \rightarrow \mathbb{R}^K$ دالتان ذات قيم متجهة ، بحيث

$$(I) \quad A \subset \mathbb{R}^N, B \subset \mathbb{R}^M \text{ و } F(P) \in B \forall P \in A.$$

(ب) P_0 نقطة داخلية في A و $Q_0 = F(P_0)$ نقطة داخلية في B .

(ج) F قابلة للاشتقاق عند P_0 و G قابلة للاشتقاق عند Q_0 .

فإن $G \circ F$ قابلة للاشتقاق عند P_0 ومصفوفة جاكوبي لها تغطي بالعلاقة

$$J(G \circ F)(P_0) = J(G)(Q_0) J(F)(P_0)$$

أي أن مصفوفة جاكوبي لتحصيل دالتين هي حاصل ضرب مصفوفتي جاكوبي للدالتين.

برهان - لتكن $P \in A$ نقطة قريبة من P_0 ، نضع $Q = F(P)$ من قابلية الدالتين F و G للاشتقاق ينتج

$$\begin{aligned} G(F(P)) &= G(Q) = G(Q_0) + J(G)(Q_0)(Q - Q_0) + \phi_G(Q) \\ &= G(Q_0) + J(G)(Q_0)(F(P_0) + J(F)(P_0)(P - P_0) + \phi_F(P) - Q_0) \\ &\quad + \phi_G(Q) \\ &= G(F(P_0)) + [J(G)(Q_0) J(F)(P_0)](P - P_0) \\ &\quad + J(G)(Q_0) \phi_F(P) + \phi_G(Q) \end{aligned} \quad (٣.١)$$

سندرس الآن الحدين الأخيرين في هذه الصيغة ، فنلاحظ أولاً أن

$$(٣.٢) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\|J(G)(Q_0) \phi_F(P)\|}{\|P - P_0\|} = 0$$

لأن الدالة الخطية $L(S) = J(G)(Q_0)(S)$ متصلة ونحقق $L(O) = 0$ والمقدار $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\|\phi_F(P)\|}{\|P - P_0\|}$

يؤول للصفر. بالنسبة للحد الآخر ؛ نلاحظ أن

$$\frac{Q - Q_0}{\|P - P_0\|} = J(F)(P_0) \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} + \frac{\phi_F(P)}{\|P - P_0\|}$$

وهو ما ينتج من قابلية الدالة F للاشتقاق عند P_0 ، والمقدار الأخير يؤول للصفر بينما المقدار الأول محدود لأنه حاصل ضرب مصفوفة ثابتة في متجه وحدة. الحد الأخير في (٣.١) يحقق إذن

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\|\phi_G(Q)\|}{\|P - P_0\|} &= \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\|\phi_G(Q)\|}{\|Q - Q_0\|} \frac{\|Q - Q_0\|}{\|P - P_0\|} \\ &= \lim_{Q \rightarrow Q_0} \frac{\|\phi_G(Q)\|}{\|Q - Q_0\|} \left(\frac{\|Q - Q_0\|}{\|P - P_0\|} \right) \\ &\quad \text{لأن الدالة } F \text{ متصلة عند } P_0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (٣.٣)$$

حيث العامل الأول يؤول للصفر بينما الثاني محدود كما بينا

بوضع

$$\phi_{\mathbf{G} \circ \mathbf{F}}(P) = J(\mathbf{G})(Q_0) \phi_{\mathbf{F}}(P) + \phi_{\mathbf{G}}(\mathbf{F}(P))$$

والتعويض في (٣.١) نجد أن

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}(P)) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(P_0)) + [J(\mathbf{G})(Q_0) J(\mathbf{F})(P_0)] (P - P_0) + \phi_{\mathbf{G} \circ \mathbf{F}}(P)$$

حيث

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\|\phi_{\mathbf{G} \circ \mathbf{F}}(P)\|}{\|P - P_0\|} = 0$$

من (٣.٢) و (٣.٣) ، وهو ما يثبت المطلوب .

٦.٣-١١-أمثلة:

(١) لتكن $\mathbf{F}(x, y) = ((x + y)/2, (x - y)/2)$ و $\mathbf{G}(u, v) = (u + v, u - v)$. نلاحظ أنهما دالتان خطيتان ، بالحساب المباشر نجد

$$J(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad J(\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي تكون مصفوفة جاكوبي للدالة الخطية $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ هي

$$J(\mathbf{G} \circ \mathbf{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهو ما يتفق مع معرفتنا بأن $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}(x, y) = (x, y)$.

(٢) لتكن $\mathbf{F}(x, y) = (x \sin y, x \cos y)$ و $\mathbf{G}(u, v) = (uv, u^2 + v^2)$. سنوجد مصفوفة جاكوبي للدالة $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ عند النقطة $(2, \pi/2)$.

$$J(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \sin y & x \cos y \\ \cos y & -x \sin y \end{pmatrix}, \quad J(\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} v & u \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

وبالتالي تكون مصفوفة جاكوبي للدالة الخطية $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ هي

$$J(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(2, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

قد تبدو هذه الصورة العامة معقدة ، لكننا سنعطى بعض الحالات الخاصة الهامة:

٦.٣-١٢ - نظرية - قاعدة السلسلة للدوال الحقيقية في متغيرين: لتكن $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ و $F : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ بحيث

$$(I) \quad F(P) \in B \forall P \in A, A, B \subset \mathbb{R}^2$$

(ب) P_0 نقطة داخلية في A و $Q_0 = F(P_0)$ نقطة داخلية في B .

(ج) g قابلة للاشتقاق عند G_0 و F قابلة للاشتقاق عند P_0 .

فإن $g \circ F$ قابلة للاشتقاق عند P_0 ومتجه التدرج لها يعطى بالعلاقة

$$\vec{\nabla} (g \circ F)(P_0) = \vec{\nabla} g(P_0) J(F)(P_0)$$

في صورة أخرى: بأخذ $h(P) = g(F(P))$ ووضع $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(P_0) &= \frac{\partial g}{\partial u}(Q_0) \frac{\partial u}{\partial x}(P_0) + \frac{\partial g}{\partial v}(Q_0) \frac{\partial v}{\partial x}(P_0) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(P_0) &= \frac{\partial g}{\partial u}(Q_0) \frac{\partial u}{\partial y}(P_0) + \frac{\partial g}{\partial v}(Q_0) \frac{\partial v}{\partial y}(P_0) \end{aligned}$$

٦.٣-١٣ - نظرية - قاعدة السلسلة للدوال الحقيقية في N من المتغيرات: لتكن $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ و $F : B \rightarrow \mathbb{R}^N$ بحيث

$$(I) \quad F(P) \in B \forall P \in A, A, B \subset \mathbb{R}^N$$

(ب) P_0 نقطة داخلية في A و $Q_0 = F(P_0)$ نقطة داخلية في B .

(ج) g قابلة للاشتقاق عند G_0 و F قابلة للاشتقاق عند P_0 .

فإن $g \circ F$ قابلة للاشتقاق عند P_0 ومتجه التدرج لها يعطى بالعلاقة

$$\vec{\nabla} (g \circ F)(P_0) = \vec{\nabla} g(P_0) J(F)(P_0)$$

في صورة أخرى: بأخذ $h(P) = g(F(P))$ ووضع $F(x_1, \dots, x_N) = (u_1(x_1, \dots, x_N), \dots, u_N(x_1, \dots, x_N))$

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(P_0) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial g}{\partial u_k}(Q_0) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(P_0)$$

٦.٣-١٤ - أمثلة:

(١) لنكن $\mathbf{F}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ولنكن $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ أي دالة قابلة للاشتقاق، لدينا

$$J(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

وبالتالي نجد من قاعدة السلسلة أن

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial g}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial g}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

(٢) نأخذ التحويلة العكسية $\mathbf{F}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \text{Arc tg}(y/x))$. ونأخذ أي دالة قابلة للاشتقاق $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ، بالحساب نجد

$$J(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

وبتطبيق قاعدة السلسلة نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{-y}{x^2 + y^2} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned}$$

٦.٣-١٥- تطبيق (التكاملات المعتمدة على بارامتر): لنكن لدينا دالة معرفة بتكامل يعتمد على بارامتر ، أي على الصورة

$$g(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, t) dt \quad x \in [a, b]$$

حيث

$$A \subset \mathbb{R}^2 \text{ و } f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad (١)$$

$$\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad (٢)$$

$$(x, \varphi_1(x)), (x, \varphi_2(x)) \in A \text{ لكل } x \in [a, b] \quad (٣)$$

ولنكن $F(x, y)$ دالة قابلة للاشتقاق عند جميع النقط الداخلية في A ونحقق $(\partial F / \partial y) = f$. فإن

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi_2(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi_1(x)) \\ &\quad + f(x, \varphi_2(x)) \varphi_2'(x) - f(x, \varphi_1(x)) \varphi_1'(x) \end{aligned}$$

٦.٣-١٦- تطبيق (حساب المشتقات في الإحداثيات القطبية): لتكن f دالة معرفة على منطقة في $\mathbb{R}^2$. من المفيد في مسائل معينة أن ندرس f كدالة في الإحداثيات القطبية (r, θ) بدلاً من الإحداثيات الكارثيزية (x, y) . سنستخدم الرمز $\tilde{f}(P)$ للدالة على $f(P)$ محسوبة في الإحداثيات القطبية. من وجهة النظر الرياضية الدقيقة نعلم أن $\tilde{f} = f \circ G$ (نحصل الدالة f مع الدالة $G(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ (٣) التي نعطي التحويل من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الكارثيزية). ولدراسة المشتقات الجزئية للدالة $\tilde{f}$ (وهو ما اعتدنا على اعتباره المشتقات الجزئية للدالة f في الإحداثيات القطبية) فإننا نستخدم قاعدة السلسلة:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial r} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta, \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta.\end{aligned}$$

١٧.٣ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

- (١) إذا كانت $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ دالة قابلة للاشتقاق على $A \subset \mathbb{R}^2$ فإن
- () $J(F)(P)$ عدد حقيقي لكل $P \in A$.
 - () $J(F)(P)$ مصفوفة أبعادها 2×3 لكل $P \in A$.
 - () $J(F)(P)$ مصفوفة أبعادها 3×2 لكل $P \in A$.
 - () $J(F)(P)$ متجه في $\mathbb{R}^3$ لكل $P \in A$.
- (٢) إذا كانت $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ دالة قابلة للاشتقاق على $A \subset \mathbb{R}^2$ فإن
- () كل مركبة من مركبات F قابلة للاشتقاق على A .
 - () كل مركبة من مركبات F لها مشتقات جزئية متصلة على A .
 - () كل مركبة من مركبات F لها مشتقات اتجاهية في جميع الاتجاهات.
- (٣) إذا كانت $g_1, g_2, g_3 : A \rightarrow \mathbb{R}$ دوال لها مشتقات جزئية على $A \subset \mathbb{R}^3$ ، ولتكن $G = (g_1, g_2, g_3)$ فإن
- () مصفوفة جاكوبي للدالة G يكون صفها الأول هو $\vec{\nabla} g_1$.
 - () مصفوفة جاكوبي للدالة G عمودها الثاني هو $\vec{\nabla} g_2$.
 - () جميع عناصر مصفوفة جاكوبي للدالة G هي مشتقات جزئية للدوال g_1, g_2, g_3 .
 - () G دالة قابلة للاشتقاق على A .
- (٤) إذا كانت $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ دالتان قابلتان للاشتقاق، ولتكن $P \in \mathbb{R}^2$ ، فإن
- () $J(G \circ F)(P) = J(G)(P) \times J(F)(P)$
 - () $J(G \circ F)(P) = J(F)(P) \times J(G)(F(P))$
 - () $J(G \circ F)(P) = J(G)(F(P)) \times J(F)(P)$
 - () $J(F \circ G)(P) = J(F)(G(P)) \times J(G)(P)$

١٨.٣ تمارين

(١) إدرس قابلية كل من الدوال التالية للاشتقاق عند النقطة P المعطاة:

$$P = (x_0, y_0), F(x, y) = (ax + by, cx + dy) \quad (أ)$$

$$P = (0, 0), F(0, 0) = (0, 0), (x, y) \neq (0, 0), F(x, y) = \left(\frac{yx^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (ب)$$

$$P = (0, 0), F(0, 0) = (0, 0), (x, y) \neq (0, 0), F(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}, \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (ج)$$

$$P = (1, 1), x \neq 0, F(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x)) \quad (د)$$

$$P = (1, 0), x \neq 0, F(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x)) \quad (هـ)$$

(٢) إ حسب مصفوفة جاكوبي (إن وجدت) لكل من الدوال التالية:

$$F(x, y) = (x + y, x - y) \quad (أ)$$

$$G(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (ب)$$

$$C(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arctan(y/x), \arcsin(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})) \quad (ج)$$

$$F(x, y, z) = (2x + y - z, x - y + z, 3x) \quad (د)$$

$$G(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2) \quad (هـ)$$

$$H = G \circ F \text{ حيث } G, F \text{ كما في المسألتين السابقتين.} \quad (و)$$

$$g = f \circ T \text{ حيث } T \text{ هي دالة التحويل من الإحداثيات الكروية للإحداثيات الكارتيزية، } f \text{ أي دالة قابلة للاشتقاق من } \mathbb{R}^3 \text{ إلى } \mathbb{R} \quad (ز)$$

$$g = f \circ U \text{ حيث } U \text{ هي دالة التحويل من الإحداثيات الاسطوانية للإحداثيات الكارتيزية، } f \text{ أي دالة قابلة للاشتقاق من } \mathbb{R}^3 \text{ إلى } \mathbb{R} \quad (ح)$$

$$(٣) \text{ لتكن } f(t) = (at, bt) \text{ ولتكن } g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ نضع } h(t) = g(f(t)) \quad (٣)$$

$$(أ) \text{ أوجد } \vec{\nabla} g(0, 0) \text{ و } f'(0).$$

$$(ب) \text{ إ حسب } h'(0). \text{ هل } h'(0) = (\vec{\nabla} g(0, 0))f'(0) \text{ ؟ بماذا تعلق هذا؟}$$

$$(٤) \text{ لتكن } f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ دالة لها مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الثانية على } A \subset \mathbb{R}^3, \text{ نعرف}$$

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

أوجد صيغة لحساب $\Delta(f)$ في الإحداثيات الاسطوانية.