

٤.٣ القيم العظمى والصغرى

في العديد من المسائل التطبيقية تظهر الحاجة لإيجاد أقل قيمة ممكنة (أو أكبر قيمة) لدالة في أكثر من متغير ، من أمثلة ذلك في الاقتصاد إيجاد أقل تكلفة ممكنة لمنتج عندما تعتمد الكلفة على أكثر من مادة داخلية في التصنيع وعدد ساعات العمل التي تصرف في إنتاجه، ومن الأمثلة في الفيزياء حساب قيم الطول الموجي التي يصدر عنها جسم أسود إشعاع له أكبر طاقة حيث الطاقة دالة في الطول الموجي وفي درجة حرارة الجسم، وفي الطب تظهر المسألة التالية:

٤.٣-١- **مثال:** في دراسة أنواع معينة من العقاقير ظهر أن تأثير العقار يعتمد على تركيزه c وعلى مدة تعاطيه t بالعلاقة

$$R(c, t) = c^2(a - c)te^{-bt}, \quad c \in [0, a], t \in [0, T], a, b, T > 0.$$

كيف يمكن حساب قيم c و t التي يكون عندها التأثير أكبر ما يمكن؟
حل هذه المسألة يحتاج لبعض المعلومات الرياضية الإضافية عن الدوال في أكثر من متغير

٤.٣-٢- **تعريف:** لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A . يقال أن الدالة f لها قيمة عظمى محلية عند P_0 إذا وجد قرص مفتوح $D_r(P_0)$ مركزه P_0 بحيث تكون

$$f(P) \leq f(P_0) \quad \forall P \in D_r(P_0)$$

ويقال أن f لها قيمة صغرى محلية عند P_0 إذا وجد قرص مفتوح $D_r(P_0)$ مركزه P_0 بحيث تكون

$$f(P) \geq f(P_0) \quad \forall P \in D_r(P_0)$$

أول الخواص التي يمكن إثباتها هي:

٤.٣-٣- **نظرية:** لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A . إذا كانت f لها قيمة عظمى أو قيمة صغرى محلية عند P_0 ، وكانت f قابلة للاشتقاق عند P_0 فإن $\vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0}$

برهان - من تعريف القابلية للاشتقاق:

$$f(P) = f(P_0) + (\vec{\nabla} f(P_0)) \cdot (P - P_0) + \phi(P), \quad \forall P \in D_r(P_0)$$

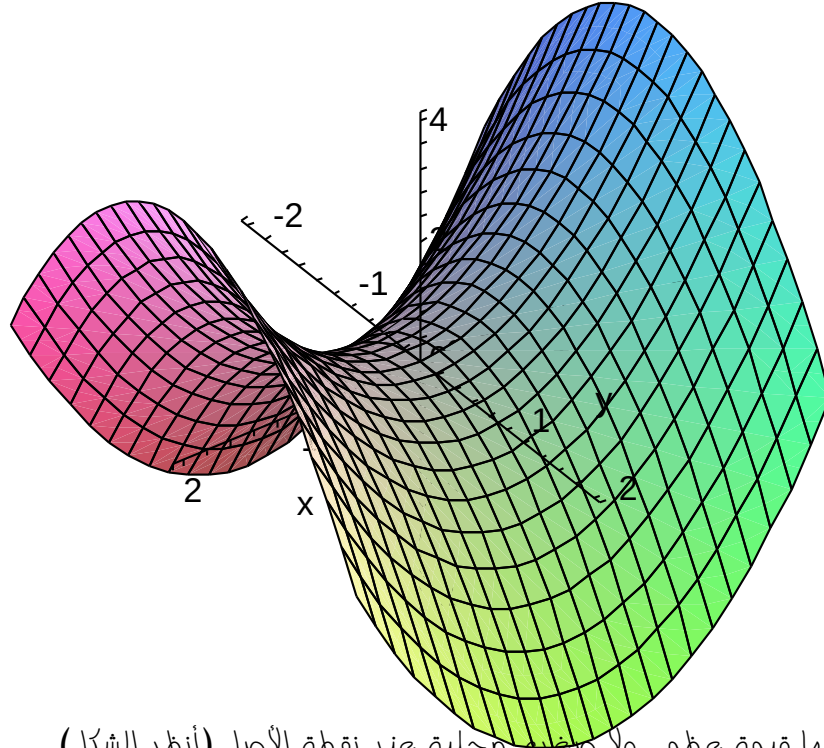
لو كان $\vec{0} \neq \vec{\nabla} f(P_0)$ فبأخذ $P = P_0 + t\vec{u}$ نجد أن

$$f(P) = f(P_0) + t\|\vec{u}\|^2 + \phi(P)$$

وحيث $\phi(P)$ صغيرة جدا بالنسبة إلى t فإن $f(P) > f(P_0)$ أي أن f لا يمكن أن يكون لها قيمة عظمى محلية عند P_0 ، بالمثل يمكن إثبات أن f لا يمكن أن يكون لها قيمة صغرى محلية عند P_0 ، بالتالي ينتج المطلوب.

تعطي النظرية السابقة شرطا لازما لوجود قيمة عظمى أو صغرى محلية للدوال القابلة للاشتقاق ، لكن هذا الشرط ليس كافي كما يوضح المثال التالي

٤.٣-٤-٤.٣ مثال: لتكن $f(x, y) = x^2 - y^2$ ، من الواضح أن f قابلة للاشتقاق عند جميع نقاط $\mathbb{R}^2$ لأنها كثيرة حدود ، هلدنا $\vec{\nabla} f(0,0) = \vec{0}$.



لكن f ليس لها قيمة عظمى ولا صغرى محلية عند نقطة الأصل (أنظر الشكل) .

للحصول على شرط كافي لوجود القيم العظمى أو الصغرى المحلية نحتاج لدراسة المشتقات من الرتبة الثانية، والتعبير عن قيم الدالة بدلالة تلك المشتقات ، وهو ما تعطينا إياه نظرية تايلور

٤.٣-٥-٤.٣ نظرية تايلور لدالة في متغيرين: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A . إذا كانت المشتقات الجزئية للدالة f من الرتبة $m+1$ موجودة في قرص $D_r(P_0)$ ومتصلة عند P_0 ، فإن

$$f(P) = f(P_0) + \sum_{n=1}^m \sum_{0 \leq \alpha \leq n} \frac{n!}{\alpha! (n-\alpha)!} \frac{\partial^n f(P_0)}{\partial x^\alpha \partial y^{n-\alpha}} (x-x_0)^\alpha (y-y_0)^{n-\alpha} \\ + \sum_{0 \leq \alpha \leq m+1} \frac{(m+1)!}{\alpha! (m+1-\alpha)!} \frac{\partial^{m+1} f(Q)}{\partial x^\alpha \partial y^{m+1-\alpha}} (x-x_0)^\alpha (y-y_0)^{m+1-\alpha}$$

حيث Q نقطة واقعة على القطعة المستقيمة بين P و P_0 .

برهان - سنستخدم الاستنتاج الرياضي على m . من السهل إثبات المطلوب عندما $m = 0, 1$.

نفرض صحة العلاقة عند m فيكون لدينا

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{0 \leq \alpha \leq n} \frac{\partial^n f(P_0)}{\partial x^\alpha \partial y^{n-\alpha}} \frac{n! (x-x_0)^\alpha (y-y_0)^{n-\alpha}}{\alpha! (n-\alpha)!} \\ &+ \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \frac{\partial^m f(Q)}{\partial x^\alpha \partial y^{m-\alpha}} \frac{m! (x-x_0)^\alpha (y-y_0)^{m-\alpha}}{\alpha! (m-\alpha)!} \end{aligned}$$

نضع $G_\alpha(Q) = \frac{\partial^m f}{\partial x^\alpha \partial y^{m-\alpha}}(Q)$ ، بما أن G_α لها مشتقات جزئية متصلة من الرتبة 1 فيكون

$$G_\alpha(Q) = G_\alpha(P_0) + \frac{\partial G_\alpha}{\partial x}(Q_1)(x-x_0) + \frac{\partial G_\alpha}{\partial y}(Q_1)(y-y_0)$$

حيث Q_1 نقطة على القطعة المستقيمة الواصلة بين P_0 و Q .

بالتعويض في المعادلة الأولى

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + \sum_{n=1}^m \sum_{0 \leq \alpha \leq n} \frac{\partial^n f(P_0)}{\partial x^\alpha \partial y^{n-\alpha}} \frac{n! (x-x_0)^\alpha (y-y_0)^{n-\alpha}}{\alpha! (n-\alpha)!} \\ &+ \sum_{0 \leq \alpha \leq m+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^m f(Q_1)}{\partial x^\alpha \partial y^{m-\alpha}} \right) \frac{m! (x-x_0)^{\alpha+1} (y-y_0)^{m-\alpha}}{\alpha! (m-\alpha)!} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^m f(Q_1)}{\partial x^\alpha \partial y^{m-\alpha}} \right) \frac{m! (x-x_0)^\alpha (y-y_0)^{m-\alpha+1}}{\alpha! (m-\alpha)!} \end{aligned}$$

وبملاحظة أن

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x^\alpha \partial y^{m-\alpha}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^{m-\alpha-1}} \right)$$

ولجميع الحدود المتشابهة في رتبة المشتقات نحصل على المطلوب.

٦-٤.٣ - نظرية - تعيين القيم العظمى والصغرى باستخدام المشتقات من الرتبة الثانية:
 لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A ، إذا كانت f لها مشتقات جزئية من الرتبة الثانية في قرص $D_r(P_0)$ ، وكانت تلك المشتقات متصلة عند P_0 وكان $\vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0}$ ، فإن

$$\begin{aligned} \Delta < 0 \& A < 0 &\implies f \text{ لها قيمة عظمى محلية عند } P_0 \\ \Delta < 0 \& A > 0 &\implies f \text{ لها قيمة صغرى محلية عند } P_0 \\ \Delta > 0 &\implies P_0 \text{ لها نقطة سرج عند } f \end{aligned}$$

حيث $\Delta = B^2 - AC$ ، $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ، $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ، $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ في حالة $\Delta = 0$ لا تغطي هذه النظرية أي معلومات عن القيم العظمى والصغرى للدالة.

المقصود بنقطة السرج هو وضع يشابه وضع نقطة الأصل بالنسبة لسطح الدالة $f(x, y) = x^2 - y^2$ ، أي أن تكون $f(P)$ لها قيم أكبر من $f(P_0)$ وقيم أقل من $f(P_0)$ في أي قرص حول P_0 .

برهان - باستخدام نظرية تايلور وبالتعويض $\vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0}$ ينتج أن

$$\begin{aligned} f(P) = f(P_0) &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_1) \frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) (x - x_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_1) \frac{(y - y_0)^2}{2} \end{aligned}$$

لكن $x \neq x_0$ ، نضع $t = (y - y_0)/(x - x_0)$ و

$$\begin{aligned} S(t) &= A \frac{(x - x_0)^2}{2} + B(x - x_0)(y - y_0) + C \frac{(y - y_0)^2}{2} \\ &= \frac{(x - x_0)^2}{2} [A + 2Bt + Ct^2] \end{aligned}$$

حيث أن هذا المقدار هو مقدار من الدرجة الثانية في t مميزه $\Delta < 0$ وحيث أن $A < 0$ فإن $S(t) < 0 \forall t$ ، ومن إنصال المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية يمكن إيجاد قرص $D_{r_1}(P_0)$ بحيث $\forall Q \in D_{r_1}(P_0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(Q) \frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(Q) (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(Q) \frac{(y - y_0)^2}{2} < 0$$

وبالتالي نكون $f(P) < f(P_0)$ لأي $P \in D_{r_1}(P_0)$.
 برهان الأجزاء الأخرى بالمثل.

٧-٤.٣ - مثال: لإيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

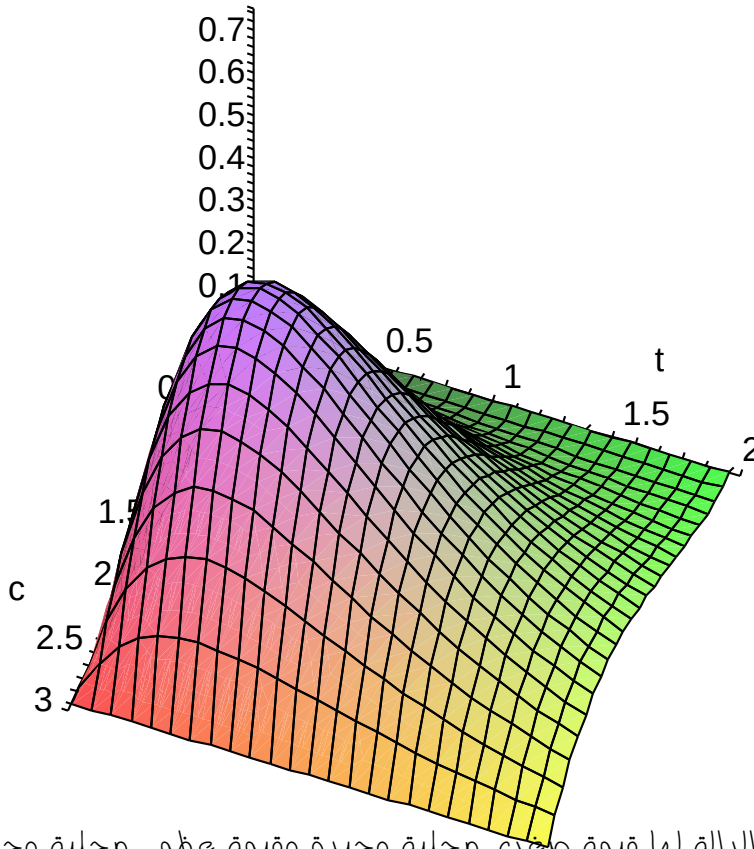
$$f(c, t) = c^2(a - c)te^{-bt}, \quad c \in [0, a], t > 0$$

نبدأ بحساب المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى والثانية

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial c}(c, t) &= (2a - 3c)cte^{-bt}, & \frac{\partial f}{\partial t}(c, t) &= c^2(a - c)(1 - bt)e^{-bt}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial c^2}(c, t) &= (a - 3c)2te^{-bt}, & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(c, t) &= c^2(a - c)e^{-bt}(b^2t - 2b), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial t}(c, t) &= (2a - 3c)c(1 - bt)e^{-bt}\end{aligned}$$

لم نوجد النقط التي عندها $\vec{\nabla} R = \vec{0}$ ، وعند كل منها نحسب قيم A, B, C, Δ

P	A	B	C	Δ	$f(P)$	النوع
$(0, 1/b)$	$2a/eb$	0	0	0	0	صغرى
$(2a/3, 1/b)$	$-2a/be$	0	$-4(a^3b/27e)$	$-8(a^4/27e^2)$	$4a^3/27be$	عظمى



من ذلك نجد أن الدالة لها قيمة صغرى محلية وحيدة وقيمة عظمى محلية وحيدة ، فهما بالتالي القيم العظمى والصغرى للدالة.

٨.٣ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

(١) إذا كان للدالة قيمة عظمى محلية عند P_0 فإن

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f(P_0) &= \vec{0} & () & \text{موجود} \\ \vec{\nabla} f(P_0) \cdot (P - P_0) &= 0 & ()\end{aligned}$$

(٢) إذا تحققت الشروط التالية لدالة f عند نقطة P_0 : $\Delta < 0, A > 0, B > 0$ فإن

() f لها قيمة عظمى محلية عند P_0 .

() f لها قيمة صغرى محلية عند P_0 .

() f لها نقطة سرج عند P_0 .
() لا نستطيع أن نصل لأي إستنتاج.

٩.٣ تمارين

(١) إدرس القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية

$$\begin{aligned} (أ) \quad f(x, y) = ax + by \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ هـ} & \quad (ز) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \\ (ب) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 & \quad (ح) \quad f(x, y) = \sqrt{4 - 4(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9})} \\ (ج) \quad f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & \quad (ط) \quad f(x, y) = \sqrt{4 - 4(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9})} \\ (د) \quad f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) & \quad (ي) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(x + 2y) \\ (هـ) \quad f(x, y) = \sin(xy) & \quad (يا) \quad f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{-(x^2 + y^2)/2} \\ (و) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \end{aligned}$$

(٢) أوجد النقطة على المجسم المكافئ $z = 4x^2 + y^2$ التي تكون أقرب ما يمكن لـ $(0, 0, 8)$. وعلى وجه العموم أوجد النقطة على ذلك المجسم التي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0, 0, a)$ ، بين ماذ يحدث عندما تتغير a .

(٣) لتكن $f(x, y)$ دالة قابلة للاشتقاق وتحقق $f(x, y) > 0$ ولتكن $g(x, y) = (f(x, y))^2$. برهن أن f, g لهما نفس نقاط القيم العظمى والصغرى ونقاط السرج.

(٤) سندرس مسألة إيجاد النقطة على السطح $z = h(x, y)$ التي تبعد أقل مسافة عن $Q_0(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. نضع $f(x, y) = d_e(Q, Q_0)$ حيث $Q = (x, y, h(x, y))$. برهن أن $P_0(x_0, y_0)$ هي نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين Q_0 و $Q_1(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ عمودية على السطح $z = h(x, y)$ عند Q_1 .

٥.٣ القيم المثلى ومعاملات لاجرانج

درسنا كيف نحدد القيم العظمى والصغرى لدالة في متغيرين في مجموعة مفتوحة، وذلك بشروط على مشتقات الدالة من الرتبة الأولى والثانية، لكن بعض المسائل العملية تتطلب إيجاد قيمة عظمى أو صغرى لدالة تحت شروط إضافية أو قيود، كما في المثال التالي:

٥.٣-١٠-مثال: مصنع ينتج علباً أسطوانية الشكل سعة كل منها لتر واحد، ويستخدم في الإنتاج نوعين من الورق المضغوط: نوع لقاعدتي الاسطوانة ونوع لجوانبها. إذا كانت تكلفة السنتيمتر المربع من النوع الأول هي b قرش وتكلفة السنتيمتر المربع من النوع الثاني هي a قرش فما هو شكل العلبة الذي يكلف أقل ما يمكن؟

الحل - ليكن r هو نصف قطر قاعدة الاسطوانة و h هو ارتفاع الاسطوانة ، يمكن تمثيل التكلفة الكلية للعلبة بالدالة

$$C(r, h) = a \times 2\pi r h + b \times 2\pi r^2$$

والمطلوب إيجاد أقل قيمة لهذه الدالة بشرط أن يكون الحجم مساوياً ١ لتر أي 1000 سنتيمتر مكعب، نضع هذا الشرط في صورة:

$$V(r, h) = \pi r^2 h = 1000.$$

من الواضح أن نطاق الدالة C هو $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ ، وأن هذه الدالة ليس لها قيمة صغرى في هذا النطاق، لكننا نحتاج لإيجاد قيمة صغرى لها على نقاط المنحنى المعرف بالعلاقة $V(r, h) = 1000$. وهذا ممكن بالتعويض عن h بدلالة r فنجد أن

$$h = 1000/\pi r^2, \quad C(r, 1000/\pi r^2) = \varphi(r) = 2000a/r + 2\pi b r^2$$

ثم نوجد قيمة صغرى لهذه الدالة كدالة في r ، فنجد $r = 10^3 \sqrt{a/(2\pi b)}$ وبالتالي $h = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}} \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$.
 يمكننا من حل هذه المسألة بفضل سهولة إيجاد علاقة بين h و r وتحويل المسألة لمسألة في متغير واحد، فما العمل لو لم يكن هذا ممكناً؟
 تقدم طريقة المعاملات غير المعينة للاجرائي حلاً لهذا النوع من المسائل

٥.٣-١١- نظرية معاملات لاجرائي: لتكن f, g دالتان قابلتان للاشتقاق ومعرفتان على منطقة $D \subset \mathbb{R}^N$ ، لأي نقطة $P \in D$ إذا تحقق أن

$$f(P) = \max_{Q \in C} f(Q) \text{ أو } f(P) = \min_{Q \in C} f(Q)$$

مع القيد

$$c = \text{ثابت}, \quad C = \{Q \in D \mid g(Q) = c\}$$

$$\text{فإنه يوجد } \lambda \in \mathbb{R} \text{ بحيث } \vec{\nabla} f(P) = \lambda \vec{\nabla} g(P)$$

٥.٣-١٢- أمثلة:

(١) سنبدأ بحل المثال السابق بطريقة لاجرائي:

$$C(r, h) = a \times 2\pi r h + b \times 2\pi r^2, \quad V(r, h) = \pi r^2 h = 1000$$

وبالتالي نجد أن شرط لاجرائي يصبح على الصورة

$$2a\pi h + 4b\pi r = \lambda 2\pi r h, \quad 2a\pi r = \lambda \pi r^2$$

وهو ما يعطي $\lambda = 2a/r$. $h = 2br/a$ وبالتعويض في المعادلة $V(r, h) = 1000$ نجد $r = 10^3 \sqrt{a/(2\pi b)}, h = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}} \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$.

(٢) سنبحث عن قيمة عظمى للدالة

$$f(x, y) = xy$$

والتي نحقق الشرط

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 1$$

نبدأ بحساب المشتقات الجزئية فنجد

$$\vec{\nabla} f = (y, x), \quad \vec{\nabla} g = (2x, 4y)$$

ثم نحل معادلات لاجرائي

$$y = 2\lambda x, \quad x = 4\lambda y$$

لنحصل على $\lambda = y/2x$ وبالتالي $x = \pm y\sqrt{2}$. وبالتعويض في الشرط نجد $x^2 = 2y^2$.
نعوض الآن في الدالة g فنجد

$$y = \pm \frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

وبالتالي تكون f لها قيمة عظمى عند $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ولها قيمة صغرى عند $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ و $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(٣) سنحاول استخدام طريقة معاملات لاجرائنا لإيجاد قيمة عظمى للدالة $f(x, y) = x + y$ تحت الشرط $xy = 16$. بحساب المشتقات الجزئية نجد أن معادلات لاجرائنا تصبح على الصورة

$$1 = \lambda y, \quad 1 = \lambda x$$

ومنها نجد $y = x$. ثم بالتعويض في الشرط نجد $x = y = \pm 4$. القيمة $8 = f(4, 4)$ ليست قيمة عظمى ولا صغرى للدالة $f(x, y)$ تحت الشرط المعطى وذلك لأن $f(16, 1) = 17 > 8$ و $f(1, 16) = \frac{17}{16} < 8$. في الحقيقة هذه الدالة ليس لها قيمة عظمى ولا صغرى تحت الشرط المعطى. يوضح هذا المثال أن نظرية معاملات لاجرائنا نعطي شرطا لازما وليس كاف لإيجاد القيم العظمى والصغرى.

تطبيقات

٥.٣-١٣ - إيجاد المسافة بين نقطة ومنحنى في المستوى: أوجد أقل مسافة بين النقطة $(0, 1)$ والقطع الزائد المعطى بالمعادلة $xy = 1$.
الحل - نستخدم معاملات لاجرائنا لإيجاد القيم الصغرى للدالة

$$f(x, y) = [d_e((x, y), (0, 1))]^2 = x^2 + (y - 1)^2$$

تحت الشرط $xy = 1$. معادلات لاجرائنا تكون على الصورة

$$2x = \lambda y, \quad 2(y - 1) = \lambda x.$$

فتكون $\lambda = 2x/y$ و $y^2 - y = x^2$ وباستخدام الشرط $xy = 1$ نجد $y^3(y - 1) = 1$ ومنه

$$y \approx 1.380277569, \quad x \approx 0.7244919589.$$

٥.٣-١٤ - إيجاد المسافة بين نقطة وسطح في الفراغ ثلاثي الأبعاد: أوجد أقل مسافة بين النقطة $(1/2, 1/2, 1)$ والسطح المعطى بالمعادلة $x^2 + y^2 = z$.
الحل - نستخدم معاملات لاجرائنا لإيجاد القيم الصغرى للدالة

$$f(x, y, z) = [d_e((x, y, z), (1/2, 1/2, 1))]^2 = (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - 1)^2$$

تحت الشرط $x^2 + y^2 - z = 0$. معادلات لاجرائنا تكون على الصورة

$$2(x - \frac{1}{2}) = 2\lambda x, \quad 2(y - \frac{1}{2}) = 2\lambda y, \quad 2(z - 1) = -\lambda.$$

فنكون $(y - \frac{1}{2}) = -2y(z - 1)$ و $(x - \frac{1}{2}) = -2x(z - 1)$ و $\lambda = -2(z - 1)$

$$x = \frac{1}{2(2z - 1)}, \quad y = \frac{1}{2(2z - 1)}$$

وباستخدام الشرط $x^2 + y^2 - z = 0$ نجد $2z(2z - 1)^2 = 1$ و

$$z = \frac{1}{12}(100 + 12\sqrt{69})^{(1/3)} + \frac{1}{3(100 + 12\sqrt{69})^{(1/3)}} + \frac{1}{3}.$$

لم نوجد x و y .

١٥-٥.٣- نظرية معاملات لاجرانج بعدة قيود: لتكن $f, g_1, \dots, g_m$ دوال قابلة للاشتقاق ومعرفة على منطقة $D \subset \mathbb{R}^N$ ، لأي نقطة $P \in D$ إذا تحقق أن

$$f(P) = \max_{Q \in C} f(Q) \text{ أو } f(P) = \min_{Q \in C} f(Q)$$

حيث C تحقق القيود

$$C = \{Q \in D \mid g_1(Q) = c_1, \dots, g_m(Q) = c_m\}$$

وكانت المتجهات $\vec{\nabla} g_1(P), \dots, \vec{\nabla} g_m(P)$ مستقلة خطياً، فإنهُ يوجد $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\vec{\nabla} f(P) = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(P) + \dots + \lambda_m \vec{\nabla} g_m(P)$$

١٦-٥.٣- تطبيق: إيجاد المسافة بين نقطة وتقاطع سطحين في الفراغ ثلاثي الأبعاد: أوجد أقل مسافة بين النقطة $(0, 0, 0)$ وبين تقاطع الاسطوانة $xy = 16$ مع المستوى $y\sqrt{3} + z = 0$.
الحل - نستخدم معاملات لاجرانج لإيجاد القيم الصغرى للدالة

$$f(x, y, z) = [d_e((x, y, z), (0, 0, 0))]^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

نحت القيود $g_1(x, y, z) = xy$ و $g_2(x, y, z) = \sqrt{3}y + z$ معادلات لاجرانج تكون على الصورة

$$xy = 16, \quad \sqrt{3}y + z = 0, \quad (2x, 2y, 2z) = \lambda_1(y, x, 0) + \lambda_2(0, \sqrt{3}, 1)$$

وبحذف λ_1, λ_2 بين هذه المعادلات نجد:

$$x = \pm 2\sqrt{8}, \quad y = \pm \sqrt{8}, \quad z = \mp \sqrt{24}$$

نتأكد من أن $\vec{\nabla} g_1(x, y, z) = (\pm\sqrt{8}, \pm 2\sqrt{8}, 0)$ و $\vec{\nabla} g_2(x, y, z) = (0, 1, 1)$ مستقلان خطياً (واضح). فينتج أن كلا من هاتين النقطتين على تقاطع المستوى والاسطوانة نحقق أقل مسافة عن نقطة الأصل، ومسافة كل منهما عن نقطة الأصل تساوي: $\sqrt{32 + 8 + 24} = 8$.