

٣.٣ المشتقات من رتب أعلى

إذا كان للدالة $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ مشتقة جزئية $\partial f / \partial x$ عند جميع نقاط مجموعة $B \subset A$ فإن تلك المشتقة الجزئية يمكن التعامل معها كدالة بحد ذاتها، فيمكن دراسة اتصالها كما يمكن دراسة مشتقاتها الجزئية بدورها.

٣.٣-١-تعريف: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ، ولتكن المشتقة الجزئية $\partial f / \partial x$ معرفة لجميع نقاط B حيث $B \subset A$ ، إذا كانت المشتقة الجزئية للدالة $g(P) = (\partial f / \partial x)(P)$ موجودة عند $P_0 \in B$ فإننا نقول أن f لها مشتقة جزئية من الرتبة الثانية عند P_0 ونرمز لهذه المشتقة بالرمز $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)$. كذلك يمكن تعريف المشتقات الجزئية $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0)$. باختصار:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (P_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (P_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (P_0) \end{aligned}$$

لابد أن يكون واضحا للقارئ أن المشتقات الجزئية الأربعة من الرتبة الثانية لدالة f في متغيرين ليست بالضرورة موجودة، فيمكن أن تكون كلها موجودة ويمكن أن توجد بعض تلك المشتقات دون أن توجد المشتقات الأخرى.

٣.٣-٢-أمثلة:

$$(١) \text{ لتكن } f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} . \text{ أثبتنا من قبل أن}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \begin{cases} y(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

بالاشتقاق مرة ثانية نجد أن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$ بينما $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ غير موجودة.

(٢) أي كثيرة حدود $f(x, y)$ لها مشتقات جزئية من جميع الرتب عند أي نقطة في $\mathbb{R}^2$.

$$(٣) \text{ لتكن } f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 / (x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} . \text{ نحسب المشتقات الجزئية}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \begin{cases} 2xy^4/(x^2 + y^2)^2 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} , \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \begin{cases} 2yx^4/(x^2 + y^2)^2 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

من الواضح أن هاتان المشتقتان متصلتان (أي أن الدالة قابلة للاشتقاق) ، بحساب المشتقات من الرتبة الثانية نجد

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \begin{cases} y^4(2y^2 - 6x^2)/(x^2 + y^2)^3 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \begin{cases} 8x^3y^3/(x^2 + y^2)^3 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}\end{aligned}$$

وهنا نلاحظ أن المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية موجودة لكنها ليست متصلة عند نقطة الأصل.

من الطبيعي أن نتساءل عن تساوي المشتقتين المختلفتين $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. وتعطينا النظرية التالية شرطا لازما لهذا التساوي

٣.٢-٣ نظرية: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ، ولتكن المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

معرفة لجميع نقاط $B \subset A$ ، إذا كانت هاتين المشتقتين متصلتين عند P_0 فإن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)$$

برهان - لتكن $P_0(x_0, y_0)$ وليكن $h \neq 0$. نضع

$$\varphi(u) = f(x_0 + u, y_0 + h) - f(x_0 + u, y_0), \quad \psi(v) = f(x_0 + h, y_0 + v) - f(x_0, y_0 + v)$$

$$\Delta_2(h) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)$$

نلاحظ أن $\Delta_2(h) = \varphi(h) - \varphi(0) = \psi(h) - \psi(0)$. بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل للدوال في متغير واحد نجد أنه يوجد $0 < u_1 < h, 0 < v_1 < h$ بحيث

$$\Delta_2(h) = \varphi'(u_1)h = \psi'(v_1)h$$

لكن

$$\begin{aligned}\varphi'(u_1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + u_1, y_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + u_1, y_0) \\ \psi'(v_1) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + v_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + v_1)\end{aligned}$$

نضع

$$\eta(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + u_1, y_0 + s), \quad \gamma(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t, y_0 + v_1)$$

ونطبق نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل على هاتين الدالتين فإنه يوجد $0 < s_1 < h, 0 < t_1 < h$ بحيث

$$\varphi'(u_1) = \eta(h) - \eta(0) = \eta'(s_1)h = h \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + u_1, y_0 + s_1)$$

$$\psi'(v_1) = \gamma(h) - \gamma(0) = \gamma'(t_1)h = h \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + t_1, y_0 + v_1)$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \Delta_2(h) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + u_1, y_0 + s_1) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + t_1, y_0 + v_1) \end{aligned}$$

وبأخذ النهاية عندما $h \rightarrow 0$ وملاحظة أن u_1, v_1, s_1, t_1 نؤول جميعها للصفر ، ومن إنصال المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية نحصل على

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \Delta_2(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة هي المشتقات الجزئية للدوال $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ و

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ ، عموماً إذا كانت لدينا مشتقات جزئية من الرتبة m معرفة عند جميع نقاط قرص $D_r(P_0)$ و متصلة عند P_0 فإننا نعرف المشتقات من الرتبة $m+1$ على أنها المشتقات الجزئية لكل من هذه المشتقات الجزئية ، وفي حالة إتصال جميع المشتقات الجزئية من رتبة ما n فإننا يمكن كتابة أي من هذه المشتقات على الصورة

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \alpha + \beta = n$$

سيكون من المفيد للقارئ أن يعيد صياغة التعريفات والنتائج الواردة في هذا الفصل في حالة الدوال في ثلاثة متغيرات أو أكثر.

٤.٣ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

(١) وجود المشتقات الجزئية من الرتبة 2 للدالة $f(x, y)$ عند $P_0(x_0, y_0)$

() يستلزم قابلية الدالة للإشتقاق عند P_0 .

() ينتج من قابلية الدالة للإشتقاق عند P_0 .

() يكافئ قابلية الدالة للإشتقاق عند P_0 .

() يتعارض مع قابلية الدالة للإشتقاق عند P_0 .

(٢) إذا كانت المشتقات الجزئية من الرتبة m للدالة f موجودة في قرص مركزه $P_0(x_0, y_0)$

فإن

() المشتقات الجزئية من الرتبة $m-1$ دوال قابلة للإشتقاق عند P_0 .

() المشتقات الجزئية من الرتبة $m-1$ دوال متصلة عند P_0 .

() المشتقات الجزئية من الرتبة $m-1$ موجودة عند P_0 .

() المشتقات الجزئية من الرتبة $m+1$ موجودة عند P_0 .

- (٣) إذا كانت المشتقات الجزئية من الرتبة 2 للدالة موجودة ومتصلة في قرص مركزه $P_0(x_0, y_0)$ فإن f قابلة للاشتقاق عند P_0 .
- () المشتقات الجزئية من الرتبة 1 قابلة للاشتقاق عند P_0 .
- () المشتقات الجزئية من الرتبة 2 قابلة للاشتقاق عند P_0 .
- () المشتقات الجزئية من الرتبة 3 موجودة عند P_0 .

٥.٣ تمارين

- (١) أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لكل من الدوال الآتية

$$f(x, y) = 2x - 3y \quad (أ)$$

$$f(x, y) = xy - x^2 \quad (ب)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (ج)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (د)$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (هـ)$$

$$f(x, y, z) = \sin(xyz) \quad (و)$$