

٢.٣ الدوال القابلة للاشتقاق

إحدى أهم خواص المشتقة لدالة في متغير واحد هي ما يسمى نظرية القيمة المتوسطة والتي تعطي قيمة الدالة عند النقط القريبة من t_0 بدلالة قيمة الدالة عند t_0 ، وتنص هذه النظرية على:

نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة للتفاضل: لتكن $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على $[a, b]$ ومشتقتها متصلة، فإنَّ لأي $x, x_0 \in [a, b]$ يكون

$$f(x) = f(x_0) + f'(\theta)(x - x_0)$$

حيث θ نقطة بين x و x_0 .

ينتج من هذه النظرية أن

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (f'(\theta) - f'(x_0))(x - x_0)$$

حيث $\lim_{x \rightarrow x_0} (f'(\theta) - f'(x_0)) = 0$ ، أي أن قيمة الدالة $f(x)$ يمكن تقريبها بالدالة الخطية $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ بخطأ صغير يؤول للصفر أسرع من الفارق $x - x_0$. نفس الخاصية تتحقق لدالة في أكثر من متغير بشروط معينة على المشتقات الجزئية

٢.٣-١- نظرية: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ولتكن $P_0(x_0, y_0)$ نقطة داخلية في A . إذا كانت المشتقات الجزئية $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ معرفة لكل $P(x, y) \in D_r(P_0)$ حيث $r > 0$ ، ومتصلة في هذا القرص، فإن

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \phi(x, y)$$

$$\text{حيث } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\phi(x, y)}{d_e(P, P_0)} = 0$$

برهان - لتكن $P(x, y)$ نقطة في $D_r(P_0)$. نضع $g(s) = f(s, y)$ و $h(t) = f(x_0, t)$. لدينا

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = g(x) - g(x_0) + h(y) - h(y_0) \quad (٣.١)$$

من نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل للدالة في متغير واحد نجد أنه توجد s (قد نعتمد على y) بين x و x_0 بحيث

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) &= g'(s)(x - x_0) = (\partial f / \partial x)(s, y)(x - x_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) (x - x_0) \end{aligned}$$

وكذلك توجد t بين y و y_0 بحيث

$$\begin{aligned} h(y) - h(y_0) &= h'(t)(y - y_0) = (\partial f / \partial y)(x_0, t)(y - y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) (y - y_0) \end{aligned}$$

بأخذ

$$\phi(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) (y - y_0)$$

والتعويض في (٣.١) نحصل على

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \phi(x, y)$$

يكفي الآن أن نثبت أن ϕ تحقق الشرط المطلوب وهو أن نؤول إلى الصفر أسرع من المسافة بين P و P_0 :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\phi(x, y)}{d_e(P, P_0)} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \\ &\quad \times \frac{(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &\quad + \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \\ &\quad \times \frac{(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

وذلك لأن المشتقات الجزئية متصلة بينما العاملان $\frac{(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$ و $\frac{(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$ محدودان.

النظرية السابقة تسمى نظرية التقريب المحلي وهي تعبر عن خاصية هامة نعتمدها كتعريف للدوال القابلة للاشتقاق

٢.٢.٢ - تعريف:

(أ) لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ولتكن $P_0(x_0, y_0)$ نقطة داخلية في A . إذا وجد قرص $D_r(P_0)$ وعددان $a, b \in \mathbb{R}$ يحققان

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + \phi(x, y), \forall P(x, y) \in D_r(P_0)$$

حيث $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\phi(x, y)}{d_e(P, P_0)} = 0$ ، فإننا نقول أن f قابلة للاشتقاق عند P_0 .

(ب) لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A . إذا وجدت كرة مفتوحة $B_r(P_0)$ ومتجه $\vec{D} \in \mathbb{R}^N$ يحقق

$$f(P) = f(P_0) + \vec{D} \cdot (P - P_0) + \phi(P) \quad \forall P \in B_r(P_0)$$

حيث $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\phi(P)}{d_e(P, P_0)} = 0$ فإننا نقول أن f قابلة للاشتقاق عند P_0 .

(ج) في هذه الحالة يسمى المقدار $\vec{D} \cdot (P - P_0)$ $df_{P_0}(P)$ بالتفاضل التام للدالة f عند P_0 .

النظرية التالية تنتج مباشرة من التعريف ومن نظرية (أ)

٢.٢.٣ - نظرية: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A . إذا كانت المشتقات الجزئية $\partial f / \partial x_k, k = 1, \dots, N$ موجودة في كرة مفتوحة $B_r(P_0)$ ومتصلة عند P_0 فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند P_0 .

٢.٢.٤ - أمثلة:

(أ) أي دالة كسرية جبرية $f(x, y) = \frac{R(x, y)}{S(x, y)}$ تكون قابلة للاشتقاق على جميع نقاط نطاقها ،

وينتج هذا من النتيجة السابقة لأن المشتقات الجزئية لأي دالة كسرية جبرية تكون هي أيضا دوال كسرية جبرية ولها نفس نطاق الدالة الأصلية ، فتكون المشتقات الجزئية بالتالي متصلة.

(ب) الدالة $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ قابلة للاشتقاق عند جميع نقاط $\mathbb{R}^3$ ، لإثبات ذلك نلاحظ أن المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz \cos(xyz), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz \cos(xyz), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy \cos(xyz)$$

هي دوال متصلة.

(ج) لتكن $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) + y^2 \sin(1/y) & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ أو } y = 0 \end{cases}$ هذه الدالة

قابلة للاشتقاق عند نقطة الأصل O ، ويتضح هذا من التعريف بأخذ $a = b = 0$ و

$\phi(x, y) = f(x, y)$ وملاحظة أن

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

من ناحية أخرى بحساب المشتقات الجزئية نجد

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} -\cos(1/x) + 2x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} -\cos(1/y) + 2y \sin(1/y) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

وهما دالتان غير متصلتان عند نقطة الأصل ، ويثبت هذا أن اتصال المشتقات الجزئية ليس شرطاً لازماً للقابلية للاشتقاق.

من السهل إثبات أن المتجه $\vec{D}$ في تعريف الاشتقاق لابد أن تكون مركباته هي المشتقات الجزئية للدالة f عند P_0 ، أي أن

٥-٢.٣- نظرية: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A . إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند P_0 فإن

$$df_{P_0}(P) = (\vec{\nabla} f)(P_0) \cdot (P - P_0) \quad (1)$$

(ب) المشتقة الاتجاهية للدالة f في اتجاه أي متجه وحدة $\vec{v}$ موجودة وتحسب من العلاقة

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = (\vec{\nabla} f)(P_0) \cdot \vec{v}$$

برهان - للتوضيح سنكتب البرهان في بعدين فقط. لتكن $f(x, y)$ قابلة للاشتقاق عند P_0 . إذن

$$\forall P(x, y) \in D_r(P_0) : f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + \phi(x, y)$$

بحساب المشتقة الاتجاهية في اتجاه $\vec{v} = (v_1, v_2)$ نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t \vec{v}) - f(P_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} av_1 + bv_2 + \frac{\phi(P_0 + t \vec{v})}{t} = av_1 + bv_2 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(P_0 + t \vec{v})}{t} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\phi(x, y)}{d_e(P_0 + t \vec{v}, P_0)} = 0 \quad \text{لأن} \end{aligned}$$

وهو ما يثبت وجود المشتقات الاتجاهية ، ويثبت أيضاً أن

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = (a, b) \cdot \vec{v}$$

بأخذ $\vec{v} = (1, 0)$ ينتج أن $(\partial f / \partial x)(P_0) = a$ وبالمثل للمشتقة الجزئية الأخرى. أي أن $(a, b) = (\vec{\nabla} f)(P_0)$.

٦-٢.٣ - نظرية: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A . إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند P_0 فإن f تكون بالضرورة متصلة عند P_0 .

برهان - لتكن f قابلة للاشتقاق عند P_0 . إذن

$$\forall P \in B_r(P_0) : f(P) = f(P_0) + \vec{\nabla} f(P_0) \cdot (P - P_0) + \phi(P)$$

بأخذ النهاية عندما $P \rightarrow P_0$ ينتج أن

$$\lim_{(P) \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$

٧-٢.٣ - النظرية - المعنى الهندسي للتفاضل التام: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A . إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند P_0 فإن

(أ) المستوى

$$\mathcal{P} : z = f(x_0, y_0) + (\vec{\nabla} f)(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

يكون مماسيا لسطح الدالة عند النقطة (x_0, y_0, z_0) ، وذلك بمعنى أنه إذا أخذنا أي منحنى $C : (\varphi(t), \psi(t), \zeta(t))$ وافي على السطح الممثل للدالة f بحيث $(\varphi(0), \psi(0), \zeta(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ فإن المماس لهذا المنحنى عند النقطة (x_0, y_0, z_0) يكون وافيًا في المستوى $\mathcal{P}$.

(ب) المتجه $\vec{n} = ((\partial f / \partial x)(x_0, y_0), (\partial f / \partial y)(x_0, y_0), -1)$ عمودي على السطح الممثل للدالة f في الاتجاه الخارجي عند P_0 .

البرهان - متروكه للقارئ .

٨-٢.٣- نظرية - جبر الدوال القابلة للاشتقاق: لتكن $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A . إذا كانت كلا من f, g قابلتان للاشتقاق عند P_0 فإن

$$(أ) \quad f + g \text{ قابلة للاشتقاق عند } P_0 \text{ و } d_{P_0}(f + g)(P) = d_{P_0}f(P) + d_{P_0}g(P)$$

$$(ب) \quad f \cdot g \text{ قابلة للاشتقاق عند } P_0 \text{ و } d_{P_0}(f \cdot g)(P) = d_{P_0}f(P) g(P_0) + f(P_0) d_{P_0}g(P)$$

(ج) إذا كان $g(P_0) \neq 0$ و $\vec{\nabla} g(P_0) \neq \vec{0}$ فإن f/g قابلة للاشتقاق عند P_0 و

$$d_{P_0}(f/g)(P) = \frac{d_{P_0}f(P) g(P_0) - f(P_0) d_{P_0}g(P)}{(g(P_0))^2}$$

البرهان - متروكه للقارئ .

الصورة الأولى لقاعدة السلسلة

المقصود بقاعدة السلسلة هو كيفية إيجاد مشتقة تحصيل دوال بدلالة مشتقات كل من تلك الدوال ، وهي أداة هامة في حساب المشتقات ، سندرس فيما يلي حالة خاصة تتمثل في إيجاد مشتقة دالة على منحنى معطى في نطاق الدالة

٩-٢.٣- : لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ، وليكن $\mathcal{C} = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t))$ منحنى في $\mathbb{R}^N$ محتوئى في A حيث $\varphi_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ، إذا كانت t_0 نقطة داخلية في الفترة $[a, b]$ بحيث $P_0 = (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_N(t_0))$ وكانت $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ لها مشتقات متصلة عند t_0 و f قابلة للاشتقاق عند P_0 فإن الدالة

$$\psi(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)), \quad t \in [a, b]$$

قابلة للاشتقاق عند t_0 ومشتقتها تغطى بالعلاقة

$$\psi'(t_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot (\varphi'_1(t_0), \dots, \varphi'_N(t_0))$$

برهان - نأخذ $t \in [a, b]$ ونضع $P = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t))$ ، من قابلية الدالة f للاشتقاق عند P_0 نجد

$$\psi(t) - \psi(t_0) = f(P) - f(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot (P - P_0) + \phi(P)$$

ومن قابلية الدوال $\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)$ للاشتقاق عند t_0 نحصل على

$$P - P_0 = (\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0), \dots, \varphi_N(t) - \varphi_N(t_0)) = (\varphi'_1(t_1)(t - t_0), \dots, \varphi'_N(t_N)(t - t_0))$$

حيث $t_1, \dots, t_N$ بين t و t_0 . من ذلك نجد أن

$$\psi(t) - \psi(t_0) = (t - t_0) \vec{\nabla} f(P_0) \cdot (\varphi'_1(t_1), \dots, \varphi'_N(t_N)) + \phi(P)$$

وبالقسمة على $t - t_0$ وأخذ النهاية

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\nabla} f(P_0) \cdot (\varphi'_1(t_1), \dots, \varphi'_N(t_N)) + \frac{\phi(P)}{t - t_0}$$

وهو ما يعطي العلاقة المطلوبة باستخدام إنصال المشتقات φ'_k ومعرفة أن $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\phi(P)}{t - t_0} = 0$

مشتقة الدالة ψ في النظرية السابقة تسمى مشتقة f على المنحنى C .

١٠.٣ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

(١) وجود المشتقتين الجزئيتين للدالة $f(x, y)$ عند $P_0(x_0, y_0)$

() يستلزم قابلية الدالة للاشتقاق عند P_0 .

() ينتج من قابلية الدالة للاشتقاق عند P_0 .

() يكافئ قابلية الدالة للاشتقاق عند P_0 .

() يتعارض مع قابلية الدالة للاشتقاق عند P_0 .

(٢) أن تكون الدالة $f(x, y)$ قابلة للاشتقاق عند $P_0(x_0, y_0)$

() يؤدي لوجود المشتقات الاتجاهية في جميع الاتجاهات عند P_0 .

() ينتج من وجود المشتقات الاتجاهية في جميع الاتجاهات عند P_0 .

() يكافئ وجود المشتقة الاتجاهية في اتجاه $\vec{u} = (1, 1)$ عند P_0 .

() قد يتحقق حتى لو لم تكن المشتقات الاتجاهية في جميع الاتجاهات موجودة عند P_0 .

(٣) إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند P_0 فإن

$$\vec{\nabla} f(P_0) \cdot P = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot P_0 \quad () \quad \vec{\nabla} f(P_0) \cdot (P - P_0) = 0$$

$$\vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0} \quad () \quad \vec{\nabla} f(P_0) \cdot (P - P_0) = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{d_e(P, P_0)}$$

(٤) قابلية الدالة $f(x, y)$ للاشتقاق عند P_0

() يؤدي لأن تكون المشتقتان الجزئيتان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ متصلتان عند P_0 .

() ينتج لو كانت المشتقتان الجزئيتان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ متصلتان عند P_0 .

() يؤدي لأن تكون المشتقتان الجزئيتان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجودتان عند P_0 .

() ينتج من إتصال الدالة f عند P_0 .

١١.٣ تمارين

(١) إدرس قابلية كل من الدوال الآتية للاشتقاق

$$f(x, y, z) = 213x^{71}y^{12}z^{93} - 25x^{28}y^{65}z^{16} \quad (أ)$$

$$f(x, y) = (3x^6y^{11})/(2x^2 - y^3) \quad (ب)$$

$$f(x, y) = \sin(xy)/(x^2 + y^2) \quad (ج)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(xy)/(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (د)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (هـ)$$

(٢) أوجد معادلة المستوى المماس للسطح الممثل للدالة عند النقطة المعطاة

$$f(x, y) = 213x^{71}y^{12} - 25x^{28}y^{65} \quad (أ) \quad \text{عند } (1, -1, 1)$$

(ب) $f(x, y) = \sqrt{4 - 4(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2})}$ عند $(3, 0, 0)$.

(ج) $f(x, y) = \sqrt{1 - (\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9})}$ عند $(2, 3, 1)$.

(د) $f(x, y) = \sin(\frac{1}{2}\pi xy)/(x^2 + y^2)$ عند $(1, 1, \frac{1}{2})$.

(هـ) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ عند $(0, 0, 0)$.

(٣) أوجد مشتقة الدالة على المنحنى المعطى عند P_0

(ا) $\mathcal{C} = (t, \sin(\pi t), \cos(\pi t))$ ، $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ عند $(0, 0, 1)$

(ب) $\mathcal{C} = (t, \sin(\pi t), \cos(\pi t))$ ، $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ عند $(0, 0, 1)$

(ج) $\mathcal{C} = (t, 2 \sin(\pi t), \cos(2\pi t))$ ، $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ عند $(0, 0, 1)$

(د) $\mathcal{C} = (t, t^2, \pi t^2/2)$ ، $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ عند $(1, 1, \pi/2)$

(٤) برهن أن القيمة المطلقة للمشتقة الإتجاهية لدالة f تكون أكبر ما يمكن في إتجاه $\vec{\nabla} f$.

(٥) لتكن $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ دالة تحقق

$$\vec{\nabla} f(P) = \vec{0} \quad \forall P \in D_r(P_0) \subset A$$

برهن أن $f(P) = \text{constant}$ على $D_r(P_0)$.