

الباب الثالث

اشتقاق الدوال في أكثر من متغير

موضوعنا الآن هو دراسة اشتقاق الدوال في أكثر من متغير ، ومفهوم الاشتقاق يرتبط في أذهاننا بمفهوم معدل تغير قيم الدالة بالنسبة لتغير متغيرها المستقل . ماذا سيعني هذا عندما تعتمد الدالة على عدة متغيرات مستقلة؟

سنبدأ مناقشتنا لمفهوم الاشتقاق بمثال

مثال نعلم أن ضغط غاز مثالي يمكن التعبير عنه كدالة في درجة حرارة الغاز T والحجم الذي يشغله V بالعلاقة

$$P(T, V) = c \frac{T}{V}, \quad T \in]0, +\infty[, V \in]0, +\infty[$$

لو كان الحجم ثابتاً فإن الضغط يتناسب طردياً مع درجة الحرارة ، ويمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة التفاضلية:

$$P(T_0 + \Delta T, V_0) = P(T_0, V_0) + \frac{c}{V_0} \Delta T$$

على العكس: لو كانت درجة حرارة الغاز ثابتة فإننا نرى أن الضغط يتناسب عكسياً مع الحجم. ويظهر ذلك من العلاقة التفاضلية

$$P(T_0, V_0 + \Delta V) = P(T_0, V_0) - c \frac{T_0}{V_0^2} \Delta V + \frac{cT_0}{V_0^2(V_0 + \Delta V)} (\Delta V)^2$$

ونلاحظ هنا أن المقدار $\frac{cT_0}{V_0^2(V_0 + \Delta V)} (\Delta V)^2$ يؤول للصفر بسرعة أكبر من ΔV . هدفنا هو الحصول على علاقة مماثلة عند تغير كل من الحرارة والحجم، أي أننا نحاول الحصول على علاقة على الصورة:

$$P(T_0 + \Delta T, V_0 + \Delta V) = P(T_0, V_0) + a\Delta T + b\Delta V + \epsilon(\Delta T, \Delta V)$$

ويفضل أن تكون الدالة $\epsilon(\Delta T, \Delta V)$ دالة تؤول للصفر بسرعة كبيرة.

١.٣ المشتقات الجزئية والمشتقات الاتجاهية

أول خطوة لدراسة معدل تغير دالة في متغيرين هي أن نُثَبِّت أحد المتغيرين وندرس معدل تغير قيم الدالة بالنسبة للمتغير الآخر، سنصيغ هذه الفكرة في التعريف التالي:

١.٣-١- تعريف - المشتقات الجزئية: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ولتكن $P_0(x_0, y_0)$ نقطة داخلية في A .

(أ) الدالة $g_1(x) = f(x, y_0)$ دالة في متغير واحد x ، إذا وجدت مشتقة g_1 عند x_0 فإننا نسميها المشتقة الجزئية لـ f عند P_0 بالنسبة لـ x ، ونرمز لها بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ أو $f_x(x_0, y_0)$ ويمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

(ب) بالمثل الدالة $g_2(y) = f(x_0, y)$ دالة في متغير واحد y ، إذا وجدت مشتقة g_2 عند y_0 فإننا نسميها المشتقة الجزئية لـ f عند P_0 بالنسبة لـ y ، ونرمز لها بالرمز $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ أو $f_y(x_0, y_0)$ ويمكن كتابتها على الصورة.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

١.٣-٢- أمثلة:

(أ) لتكن $f(x, y) = h(x)$ لا تعتمد على y ، نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h(x_0) - h(x_0)}{k} = 0$$

(ب) لتكن $f(x, y) = x^2 + y^2$ ، بتثبيت $y = y_0$ نجد $f(x, y_0) = x^2 + y_0^2$ وبالتالي يكون

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0$$

(ج) لندرس الدالة المعرفة بالعلاقة

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

من دراستنا للنهايات لاحظنا أن هذه الدالة ليس لها نهاية عند نقطة الأصل. فقيمها تتردد بين $-1/2$ و $1/2$ ، من الواضح إذن أن من المفروض أن يكون معدل تغير هذه الدالة لانهاية ، إذ أننا نستطيع أن نجد نقطة قريبة جدا من نقطة الأصل بحيث تكون قيمة الدالة عند تلك النقطة تساوي $1/2$ بينما قيمتها عند نقطة الأصل تساوي الصفر أي أن قيم الدالة تتغير بمقدار كبير نسبيا بينما لا ننزاح متغيراتها عن الصفر إلا قليلا.

من جهة أخرى لو درسنا النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y}$$

لوجدنا أن قيمة كل منهما تساوي 0 ، أي أن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

(٤) لتكن $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، سندرس المشتقات الجزئية عند $(0, 0)$. بالتعويض عن $y = 0$ نجد $f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$ وهي دالة غير قابلة للاشتقاق عند 0. أي أن المشتقة الجزئية $(\partial f / \partial x)(0, 0)$ غير موجودة ، وبالمثل بالنسبة لـ $(\partial f / \partial y)(0, 0)$.

لو نظرنا لتعريف المشتقات الجزئية هندسيا فسنجد أننا ندرس معدل تغير قيم الدالة f عندما تقترب النقطة $P(x, y)$ من $P_0(x_0, y_0)$ على مسار موازي لأحد محوري الإحداثيات ، ويمكن تعميم هذه الفكرة بدراسة المشتقات الاتجاهية

١.٣-٢- تعريف - المشتقات الاتجاهية: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ولتكن $P_0(x_0, y_0)$ نقطة داخلية في A وليكن $\vec{u} = (u_1, u_2)$ متجه وحدة في $\mathbb{R}^2$. نعرف المشتقة الاتجاهية للدالة f عند P_0 في اتجاه $\vec{u}$ بأنها النهاية (إن وجدت)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + h \vec{u}) - f(P_0)}{h}$$

من الواضح أن المشتقات الجزئية هي نوع خاص من المشتقات الاتجاهية وبالتحديد:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \vec{j}}, \quad \vec{i} = (1, 0), \quad \vec{j} = (0, 1)$$

١.٣-٤- أمثلة:

(١) لتكن $f(x, y) = x^2 + y^2$ ، $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ، $P_0(x_0, y_0)$ نجد

$$\begin{aligned} f(P_0 + t \vec{u}) - f(P_0) &= x_0^2 + 2tu_1x_0 + t^2u_1^2 + y_0^2 + 2tu_2y_0 + t^2u_2^2 - x_0^2 - y_0^2 \\ &= t(2u_1x_0 + 2u_2y_0 + t) \end{aligned}$$

، وبالتالي يكون

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 2u_1x_0 + 2u_2y_0$$

(٢) لتكن $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ من الواضح أن

$$f(O + t \vec{u}) - f(O) = \frac{tu_1tu_2}{t^2u_1^2 + t^2u_2^2} = u_1u_2$$

، وبالتالي يكون $(\partial f / \partial \vec{u})(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1u_2}{t}$ وهي غير موجودة إلا عندما تكون إحدى المركبتين u_1, u_2 تساوي الصفر.

(٣) لتكن $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ولتكن $P_0 = O$. بالحساب:

$$(f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0))/t = |t|/t$$

ونهاية هذا المقدار غير موجودة (النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار). وبالتالي فإن $(\partial f / \partial \vec{u})(P_0)$ غير موجودة.

يمكن دراسة المشتقات الجزئية والمشتقات الاتجاهية لدالة في N من المتغيرات وذلك حسب التعريفات التالية

١.٣-٥-تعريفات: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ولتكن $P_0(x_1^0, \dots, x_N^0)$ نقطة داخلية في A .

(أ) الدالة $g_k(x) = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x, x_{k+1}^0, \dots, x_N^0)$ دالة في متغير واحد x ، إذا وجدت مشتقة g_k عند x_k^0 فإننا نسميها المشتقة الجزئية لـ f عند P_0 بالنسبة لـ x_k ، ونرمز لها بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x_k}(P_0)$ أو $f_{x_k}(P_0)$. ويمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^0, \dots, x_N^0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \dots, x_N^0) - f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_N^0)}{h}$$

(ب) ليكن $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)$ متجهٌ وحدة في $\mathbb{R}^N$. نُعرِّف المشتقة الاتجاهية للدالة f عند P_0 في اتجاه $\vec{u}$ بأنها النهاية (إن وجدت)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + h\vec{u}) - f(P_0)}{h}$$

المتجه في $\mathbb{R}^N$ الذي مركباته هي $((\partial f / \partial x_1)(P_0), \dots, (\partial f / \partial x_N)(P_0))$ يسمى متجهُ التدرج للدالة f عند P_0 (gradient vector)، ويرمز له بالرمز $\vec{\nabla} f(P_0)$.

٦.٣ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

(١) وجود المشتقتين الجزئيتين للدالة $f(x, y)$ عند $P_0(x_0, y_0)$

() يستلزم اتصال الدالة عند P_0 .

() ينتج من اتصال الدالة عند P_0 .

() يستلزم وجود نهاية للدالة عند P_0 .

() يؤدي لعدم اتصال الدالة عند P_0 .

- (٢) وجود المشتقة الجزئية $(\partial f / \partial x)(x_0, y_0)$
 () يؤدي لوجود المشتقات الاتجاهية في جميع الاتجاهات عند P_0 .
 () ينتج من وجود المشتقات الاتجاهية في اتجاه $\vec{u} = (1, 1)$ عند P_0 .
 () يكافئ وجود المشتقة الاتجاهية في اتجاه $\vec{u} = (1, 0)$ عند P_0 .
 () يؤدي لوجود المشتقة الجزئية $(\partial f / \partial y)(x_0, y_0)$.

(٣) إذا كانت $f(x)$ دالة في متغير واحد x فإن

$$\begin{pmatrix} \partial f / \partial x = 0 \\ \partial f / \partial y = 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \partial f / \partial x = \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial x = f' \end{pmatrix}$$

٧.٣ تمارين

(١) إدرس المشتقات الجزئية والاتجاهية للدالة عند النقطة المعطاة

- (ا) $f(x, y) = ax + by$ عند $P_0(x_0, y_0)$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$
- (ب) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x-y} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ عند $P_0 = (0, 0)$
- (ج) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-y^2} & x \neq \pm y \\ 0 & x = \pm y \end{cases}$ عند $P_0 = (1, 1)$
- (د) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^3+y^3} & x \neq -y \\ 0 & x = -y \end{cases}$ عند $P_0 = (1, -1)$
- (هـ) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ عند $P_0 = (0, 0)$
- (و) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4+y^3} & x^4 \neq -y^3 \\ 0 & x^4 = -y^3 \end{cases}$ عند $P_0 = (0, 0)$
- (ز) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^{3/2}+y^2} & x^{3/2} \neq -y^2 \\ 0 & x^{3/2} = -y^2 \end{cases}$ عند $P_0 = (0, 0)$
- (ح) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^{2\alpha}+y^{2\beta}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ حيث $\alpha, \beta > 0$
- (ط) $f(x, y) = \begin{cases} \cos(\frac{x^2}{x^2+y^2}) \sin(\frac{x^3}{x^2+y^2}) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ عند $P_0 = (0, 0)$
- (ي) $f(x, y) = \begin{cases} \cos(x+y) \sin(\frac{x^2}{x^2+y^2}) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ عند $P_0 = (0, 0)$
- (يا) $f(x, y) = \begin{cases} \cos(\frac{x^2}{x^2+y^2}) \sin(x+y) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ عند $P_0 = (0, 0)$
- (يب) $f(x, y) = \begin{cases} \cos(\frac{x^2}{x^2+y^2}) \tan(x + \pi/4) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ عند $P_0 = (0, 0)$

(٢) $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$

$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

(٣) لتكن $A \subset \mathbb{R}^2$ ، $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ولتكن P_0 نقطة داخلية في A . نفرض أنه يوجد $D_r(P_0)$ بحيث $f_x(P)$ $f_y(P)$ موجودة لكل $P \in D_r(P_0)$ وبحيث تكون الدالتان f_x و f_y متصلتان عند P_0 .
برهن أن f تكون متصلة عند P_0 .