

٢.٢ اتصال الدوال الحقيقية في أكثر من متغير

لا يختلف مفهوم الاتصال للدوال في أكثر من متغير عن اتصال الدوال في متغير واحد إلا في الناحية الحسابية، وسنرى ذلك من خلال التعريف التالي

١-٢.٢- تعريف اتصال الدالة في أكثر من متغير: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ولتكن $P_0 \in A$ ، نقول أن الدالة f متصلة عند P_0 إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث لأي $P \in A$: إذا كانت $d_e(P, P_0) < \delta$ فإن $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$. ونقول أن f متصلة على $A \supset B$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة $P_0 \in B$.

٢-٢.٢ - ملاحظات على التعريف:

(١) التعريف السابق يماثل تعريف الاتصال في متغير واحد، الاختلاف الوحيد هو أننا أخذنا المسافة $d_e(P, P_0)$ في $\mathbb{R}^N$ مكان المسافة $|x - x_0|$ في $\mathbb{R}$.

من المهم ملاحظة العلاقة بين هذا التعريف وبين تعريف النهاية

(٢) إذا كانت $P_0 \in A$ نقطة نراكم لـ A فإن f تكون متصلة عند P_0 إذا كان فقط إذا كان $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

(٣) أما إذا كانت P_0 نقطة معزولة من A فإن أي دالة $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ تكون متصلة عند P_0 .

يستمر التماثل بين مفهوم اتصال الدالة في أكثر من متغير واتصال الدالة في متغير واحد ليشمل التعامل مع العمليات الجبرية على الدوال

٢-٢.٢- نظرية: جبر الدوال المتصلة: لتكن $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ولتكن $P_0 \in A$ ، إذا كانت كل من f, g متصلتين عند P_0 فإن

(أ) $f + g$ ، fg متصلتان عند P_0 .

(ب) f/g متصلة عند P_0 إذا كانت $g(P_0) \neq 0$ (أي إذا كانت P_0 تنتمي لمجال الدالة f/g).

(ج) لأي دالة $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $f(P_0)$ تكون الدالة $\varphi \circ f$ متصلة عند P_0 .

برهان - إذا كانت P_0 نقطة معزولة من A فإن الاتصال يكون تلقائياً. أما عندما تكون P_0 نقطة نراكم لـ A فإن الاتصال ينتج من نظرية جبر النهايات (نظرية ٨.١.٣).

٤-٢.٢ - أمثلة أساسية على الدوال المتصلة:

(١) أي دالة ثابتة تكون متصلة ، من السهل إثبات ذلك مباشرة من التعريف.

(٢) الدالتان $f(x, y) = x$ ، $g(x, y) = y$ متصلتان ، وينتج ذلك من المتباينتين

$$|x - a| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \quad |y - b| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

(٣) من جبر الدوال المتصلة ينتج أن أي دالة كسرية جبرية في متغيرين $R(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ (حيث f, g كثيرتي حدود) تكون دالة متصلة على نطاقها.

(٤) أيضا من جبر الدوال المتصلة يمكن استنتاج أن الدوال

$$\sqrt{R(x, y)}, \quad \sin(R(x, y)), \quad \cos(R(x, y)), \quad e^{R(x, y)}, \dots$$

تكون متصلة، حيث $R(x, y)$ دالة كسرية جبرية في متغيرين.

(٥) جميع الأمثلة السابقة يمكن تعميمها للدوال في ثلاثة متغيرات أو أكثر.

سنستكمل تعميم المفاهيم والنظريات التي درسناها للدوال المتصلة في متغير واحد إلى حالة الدوال في أكثر من متغير، وسننتقل لمناقشة بعض النظريات الشهيرة عن الدوال المتصلة، وسنقتصر على النظريات الشهيرة التالية:
القيم العظمى والصغرى : أي دالة متصلة على فترة مغلقة تكون محدودة، وتصل لقيمتها العظمى والصغرى في نقط من الفترة.
الاتصال المنتظم : أي دالة متصلة على فترة مغلقة تكون متصلة إتصالا منتظما.
القيم الوسيطة : صورة أي فترة بدالة متصلة تكون أيضا فترة.
 لصياغة هذه النظريات للدوال في أكثر من متغير يجب أولا أن نقدم بعض التعريفات

٢.٢-٥-تعريفات: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ، نقول أن f متصلة بانتظام على A إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P, Q \in A : d_e(P, Q) < \delta \implies |f(P) - f(Q)| < \varepsilon.$$

ونقول أن f محدودة على A إذا وجد $M > 0$ بحيث $M > 0$ بحيث $\forall P \in A : |f(P)| \leq M$

نلاحظ أن النظريات السابقة قد درسناها في السابق للدوال المعرفة على فترات، وأيضا على فترات مغلقة، فما هو المفهوم المناظر للفترة المغلقة في $\mathbb{R}^N$ ؟

٢.٢-٦-نظرية: خواص الدوال المتصلة: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة حيث $A \subset \mathbb{R}^N$

(أ) إذا كانت A مجموعة محدودة ومغلقة فإن f تكون دالة محدودة وتصل لقيمتها العظمى والصغرى.

(ب) إذا كانت A مجموعة محدودة ومغلقة فإن f تكون متصلة إتصالا منتظما على A .

(ج) إذا كانت $B_r(P) \subset A$ فإن $f(B_r(P))$ فترة.

برهان - متروك للقارئ.

٧.٢ تمارين.

(١) إدرس اتصال كل من الدوال الآتية

$$f(x, y) = ax + by \quad (١)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{x - y} \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y) = \frac{(xy)}{x^2 + y^2} \quad (\text{ج})$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + y^3} \quad (\text{د})$$

$$f(x, y) = \sin\left(\sqrt{\frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2}}\right) \quad (\text{هـ})$$

$$f(x, y) = \int_{-1}^1 \frac{y \cos t}{((x - t)^2 + y^2)^{3/2}} dt \quad (\text{و})$$

$$f(x, y, z) = \sin x \cos y \sin z \quad (\text{ز})$$

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - t^2} \quad (\text{ح})$$

(٢) برهن النتائج المذكورة في مثال «٤».

(٣) لتكن $f(x, y, z)$ دالة متصلة معرفة على $A \subset \mathbb{R}^3$ ، برهن أنه لأي z_0 تكون الدالة $g(x, y) = f(x, y, z_0)$ متصلة على $B = \{(x, y) | (x, y, z_0) \in A\}$.

(٤) هل عكس الخاصية السابقة صحيح؟ أي : هل إذا كان لكل z_0 الدالة $g(x, y) = f(x, y, z_0)$ متصلة كدالة في ثلاثة متغيرات؟

٣.٢ الدوال ذات القيم المتجهة - الإتصال والنهايات

حتى الآن درسنا دوال نطاقها $A \subset \mathbb{R}^N$ ونطاقها المصاحب هو $\mathbb{R}$. من المفيد أيضا أن نتعامل مع الدوال ذات القيم في $\mathbb{R}^M$ حيث $M \in \mathbb{N}^*$. أي دالة من هذا النوع بحيث $M > 1$ تسمى دالة متجهة أو ذات قيم اتجاهية vector-valued function.

إذا كانت $F : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ و $P \in A$ فإن $F(P) = (z_1, \dots, z_M)$ نضع $f_k(P) = z_k$ فيمكن بالتالي تمثيل الدالة F على الصورة $F(P) = (f_1(P), \dots, f_M(P))$ ، أي أن

٣.٢-٨- نظرية : أي دالة ذات قيم في $\mathbb{R}^M$ هي عبارة عن M -مرتب من الدوال ذات القيم الحقيقية ، تسمى كل منها مركبة من مركبات الدالة الاتجاهية.

دراسة النهايات والاتصال لهذه الدوال تتحول ببساطة لدراسة النهايات والاتصال لمركباتها، وسنعطي فقط تعريفات النهايات والاتصال ثم نوضح العلاقة بينها وبين الخواص المقابلة للمركبات

٩-٣.٢- تعريف: لتكن $F : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ، ولتكن $P_0 \in \mathbb{R}^N$

(ا) إذا كانت P_0 نقطة تراكم لـ A و $Q_0 \in \mathbb{R}^M$ فإننا نقول أن Q_0 هو نهاية الدالة F عند P_0 إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall P \in A (0 < d_e(P, P_0) < \delta \implies d_e(F(P), Q_0) < \varepsilon)$$

(ب) إذا كانت $P_0 \in A$ فإننا نقول أن F متصلة عند P_0 إذا كانت

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall P \in A (d_e(P, P_0) < \delta \implies d_e(F(P), F(P_0)) < \varepsilon)$$

١٠-٣.٢- نظرية: لتكن $F : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ، ولتكن

$F(P) = (f_1(P), \dots, f_M(P))$ ولتكن $P_0 \in \mathbb{R}^N, Q_0(a_1, \dots, a_M) \in \mathbb{R}^M$

(ا) إذا كانت P_0 نقطة تراكم لـ A فإن

$$\lim_{P \rightarrow P_0} F(P) = Q_0 \iff \forall k, 1 \leq k \leq M : \lim_{P \rightarrow P_0} f_k(P) = a_k$$

(ب) إذا كانت $P_0 \in A$ فإن F متصلة عند P_0 إذا وفقط إذا كانت كل مركبة f_k متصلة عند P_0 .

١١-٣.٢- أمثلة:

(١) لتكن $F(x, y) = (x, y, 0)$ ، فإن F دالة متصلة من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^3$ لأن مركباتها دوال متصلة.

(٢) لتكن $F(x, y, z) = (x, y)$ ، F دالة متصلة من $\mathbb{R}^3$ إلى $\mathbb{R}^2$ نسمى الإسقاط على المستوى XY .

(٣) لتكن $F(x, y) = (x, y, 0) \times (0, x, y)$ ، يمكن إعادة كتابة F على الصورة $F(x, y) = (y^2, -xy, x^2)$ ويتضح بالتالي أنها دالة متصلة .

(٤) لتكن

$$F(x, y) = \begin{cases} (\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \frac{xy}{x^2+y^2}, \frac{xy^2}{x^2+y^2}) & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0, 0) & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ليست دالة متصلة لأن مركبتها الثانية منفصلة عند الصفر .

(٥) لتكن $F(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z)$ ، وهي دالة من $\mathbb{R}^3$ إلى $\mathbb{R}^2$ الدالة F نسمى دالة خطية .