

الباب الثاني

النهايات والاتصال في أكثر من متغير

سنتعرف في هذا الباب على المفهوم الرئيسي للتحليل الرياضي - مفهوم النهاية - في $\mathbb{R}^n$ ، هدفنا الرئيسي هو أن نرى أوجه التشابه بين مفهوم النهاية في أكثر من متغير ومفهوم النهاية في متغير واحد، لذلك نبدأ بفصل عن الدوال في متغيرين وثلاث متغيرات ونهاياتها، ثم ندرس اتصال الدوال الحقيقية في أكثر من متغير، ونختم هذا الباب بدراسة الدوال ذات القيم الاتجاهية.

١.٣ نهايات الدوال في متغيرين وثلاثة متغيرات

سنبدأ هذا الفصل بدراسة نهاية دالة في متغيرين عند نقطة $P_0 \in \mathbb{R}^2$ ، ولكي يكون لهذه الدراسة معنى لابد أن يكون من الممكن أن تقترب عناصر نطاق الدالة من النقطة P_0 دون أن تصل لها، ويتحقق هذا إذا كانت نقطة تراكم وهو ما يمكن صياغته بأن أي قرص مفتوح مركزه P_0 يحتوي عناصر من نطاق الدالة غير P_0 نفسها. في هذه الحالة يمكن تعريف مفهوم النهاية على الصورة التالية:

١.٣-١- تعريف نهاية دالة في متغيرين: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ، ولتكن P_0 نقطة تراكم لـ A ، وليكن $\ell \in \mathbb{R}$. نقول أن ℓ هي نهاية الدالة $f(P)$ عندما نؤول P إلى P_0 إذا تحقق: لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث $|f(P) - \ell| < \varepsilon$ لأي نقطة $P \in A$ تحقق $0 < d_e(P, P_0) < \delta$. أو بصورة مختصرة

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall P (P \in A \& 0 < d_e(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - \ell| < \varepsilon)$$

١.٣-٢- أمثلة:

(١) لتكن $f(x, y) = 2x + 3y$ نطاق هذه الدالة هو $A = \mathbb{R}^2$. نأخذ $P_0(1, 2)$ ونثبت أن $\ell = 8$ هي نهاية $f(P)$ عندما نؤول P إلى P_0 .

$$\begin{aligned} |f(x, y) - \ell| &= |2x + 3y - 8| = |2(x - 1) + 3(y - 2)| \\ &\leq 2|x - 1| + 3|y - 2| \leq 2d_e(P, P_0) + 3d_e(P, P_0) \\ &\text{لأن } |x - 1| \leq d_e(P, P_0) \text{ و } |y - 2| \leq d_e(P, P_0) \\ &\leq 5d_e(P, P_0) \end{aligned}$$

نأخذ إذن $\delta = \varepsilon/5$ فينتج أن

$$d_e(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - 8| < \varepsilon$$

(٢) لتكن $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ نطاقها $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ونأخذ $P_0 = (0, 0)$. من الواضح أن $(0, 0)$ نقطة تراكم لنطاق f . سنثبت أن $\ell = 0 \in \mathbb{R}$ هو نهاية $f(x, y)$ عندما نؤول $P(x, y)$ إلى $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} |f(x, y) - \ell| &= \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| = |x| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \\ &\leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\quad x^2 \leq (x^2 + y^2) \text{ لأن} \\ &= d_e(P, P_0) \end{aligned}$$

ينتج أنه إذا اخترنا $\delta = \varepsilon$ نجد

$$d_e(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - 0| < \varepsilon$$

(٣) لتكن $f(x, y) = \frac{y \sin x^2}{\sin(x^2 + y^2)}$ نطاقها $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ونأخذ $P_0 = (0, 0)$. سنثبت أن $\ell = 0 \in \mathbb{R}$ هو نهاية $f(x, y)$ عندما نؤول $P(x, y)$ إلى $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} |f(x, y) - \ell| &= \left| \frac{y \sin x^2}{\sin(x^2 + y^2)} \right| \\ &\leq |y| \left| \frac{x^2 + y^2}{\sin(x^2 + y^2)} \right| \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \\ &\quad \sin x^2 \leq x^2 \text{ لأن} \\ &\leq |y| \left| \frac{x^2 + y^2}{\sin(x^2 + y^2)} \right| \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad d_e(P, P_0) < \pi/4 \\ &\quad \text{لأن } \left| \frac{x^2 + y^2}{\sin(x^2 + y^2)} \right| < \sqrt{2} \text{ عندما } x^2 + y^2 < \pi/4 \end{aligned}$$

ينتج أنه إذا اخترنا $\delta = \min(\varepsilon/\sqrt{2}, \sqrt{\pi/4})$ نجد

$$d_e(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - 0| < \varepsilon$$

تعميم هذا التعريف للدوال في أكثر من متغيرين لا يتطلب أي جهد، في الحقيقة لدينا نفس التعريف

٣-١.٢- تعريف نهاية دالة في N من المتغيرات: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ، ولتكن $P_0 \in \mathbb{R}^N$ نقطة تراكم لـ A ، وليكن $\ell \in \mathbb{R}$. نقول أن ℓ هي نهاية الدالة $f(P)$ عندما نؤول P إلى P_0 إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall P (P \in A \& 0 < d_e(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - \ell| < \varepsilon)$$

يمكن أيضا تعريف مفهوم أن تؤول دالة إلى المالانهاية (موجبة أو سالبة) ، وسنكتفي بتعريف إحدى الحالتين ويمكن للقارئ أن يصيغ التعريف الآخر.

٤-١.٣- تعريف: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ، ولتكن $P_0 \in \mathbb{R}^N$ نقطة تراكم لـ A . نقول أن $+\infty$ هي نهاية الدالة $f(P)$ عندما تؤول P إلى P_0 إذا تحقق:

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : \forall P (P \in A \& 0 < d_e(P, P_0) < \delta \implies f(P) > M)$$

٥-١.٣- أمثلة:

(١) لتكن $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ، $P_0 = (1, 2, 3)$. سنثبت أن $\ell = 14$ هي نهاية $f(P)$ عندما تؤول P إلى P_0 .

$$\begin{aligned} |f(x, y, z) - 14| &= |x^2 + y^2 + z^2 - 14| \\ &= |x^2 - 1 + y^2 - 4 + z^2 - 9| \\ &= |(x-1)(x+1) + (y-2)(y+2) + (z-3)(z+3)| \\ &\leq |x-1||x+1| + |y-2||y+2| + |z-3||z+3| \\ &\leq 3|x-1| + 5|y-2| + 7|z-3| \\ d_e(P, P_0) < 1 \quad \text{عندما} \quad &\begin{aligned} &\text{لأن } |x+1| < 3 \text{ و } |y+2| < 5 \text{ و } |z+3| < 7 \\ &\leq 15d_e(P, P_0) \end{aligned} \end{aligned}$$

نختار $\delta = \min(1, \varepsilon/15)$ فنتج أن

$$d_e(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - 14| < \varepsilon$$

(٢) لتكن $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ ولتكن $P_0 = (0, 0, 0)$. سنثبت أن $f(P)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما تؤول P إلى P_0 .
ليكن $M > 0$ معطى . نختار $\delta = 1/\sqrt{M}$. من الواضح أن

$$d_e(P, P_0) < \delta \implies |f(P)| > \frac{1}{\delta^2} = M$$

أول نظرية نحتاجها هي النظرية المعتادة عن وحدانية النهاية:

٦-١.٣- نظرية: وحدانية النهاية: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ، ولتكن $P_0 \in \mathbb{R}^N$ نقطة تراكم لـ A .
إذا كان كل من $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ نهاية للدالة f عندما تؤول P إلى P_0 فإن $\ell_1 = \ell_2$.
وبالتالي يمكن أن نعبر عن قيمة النهاية بالرموز المعتادة

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \ell$$

برهان - سنثبت النظرية في حالة $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ ونترك برهان الحالات الأخرى للقارى. نفرض أن $\ell_1 \neq \ell_2$ ونأخذ $\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|/2$ من تعريف النهاية يوجد $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ بحيث لأي $P \in A$

$$0 < d_e(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - \ell_1| < \varepsilon, \quad 0 < d_e(P, P_0) < \delta_2 \implies |f(P) - \ell_2| < \varepsilon$$

نختار $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ وحيث أن P_0 نقطة تراكم لـ A فإنه توجد نقطة $P \in A$ بحيث $0 < d_e(P, P_0) < \delta$ ، باستخدام هذه النقطة P نجد أن

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(P)| + |\ell_2 - f(P)| < \varepsilon + \varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|$$

وهو مستحيل، من ذلك ينتج أن الفرض $\ell_1 \neq \ell_2$ خطأ ، وبالتالي $\ell_1 = \ell_2$.

النظريتان التاليتان من النظريات المعتادة عن النهايات .

٧-١.٣- نظرية: وجود النهاية يستلزم محدودية الدالة: إذا كانت

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \ell \in \mathbb{R} \text{ فإنَّ يوجد } \delta > 0 \text{ بحيث}$$

$$P \in A \& 0 < d_e(P, P_0) < \delta \implies \ell - 1 < f(P) < \ell + 1$$

٨-١.٣- نظرية: الخواص الجبرية للنهايات: لتكن $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$

، ولتكن $P_0 \in \mathbb{R}^N$ نقطة تراكم لـ A ، إذا كان $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \ell_1$ و

$\lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = \ell_2$ حيث $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ فإن

$$\lim_{P \rightarrow P_0} (f + g)(P) = \ell_1 + \ell_2 \quad (١)$$

$$\lim_{P \rightarrow P_0} (f \cdot g)(P) = \ell_1 \cdot \ell_2 \quad (٢)$$

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \left(\frac{f}{g}\right)(P) = \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad (٣) \text{ بشرط أن } \ell_2 \neq 0$$

$$(٤) \text{ لأي دالة متصلة } \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ يكون } \lim_{P \rightarrow P_0} (\varphi \circ f)(P) = \varphi(\ell_1)$$

برهان - سنثبت فقط (٤) ، ونترك باقي الأجزاء للقارى .

برهان (٤) نلاحظ أولاً أنه لكي يكون نحصيل الدالتين $f \circ \varphi$ معرفاً فلا بد أن يكون مدى f جزء من مجال φ .

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى ، من اتصال φ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث لأي $t \in \mathbb{R}$

$$(*) \quad |t - \ell_1| < \delta_1 \implies |\varphi(t) - \varphi(\ell_1)| < \varepsilon$$

بأخذ $\varepsilon_1 = \delta_1$ في تعريف النهاية $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \ell_1$ ينتج أنه يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$(**) \quad 0 < d_e(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - \ell_1| < \delta_1$$

باستخدام المتباينتين $(*)$ و $(**)$ نستنتج

$$0 < d_e(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - \ell_1| < \delta_1 \implies |\varphi(f(P)) - \varphi(\ell_1)| < \varepsilon$$

٩-١.٣- أمثلة:

(١) لتكن $f(x, y) = \sin\left(\frac{x^3}{x^2 + y^2}\right)$. أثبتنا في مثال سابق أن $\lim_{P \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$ ،
وحيث أن الدالة $\sin t$ متصلة على $\mathbb{R}$ ، فإن

$$\lim_{P \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \sin 0 = 0$$

(٢) لتكن $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2 + 1}$ ، $P_0(0, 0)$ من الواضح أن نهاية المقام لا تساوي الصفر،
بينما نهاية البسط تساوي الصفر، إذن

$$\lim_{P \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

ربما كان أكثر ما يعيب تعريف النهاية هو أنه يعتمد على معرفة قيمة النهاية مسبقا،
فصياغة التعريف تشترط معرفة قيمة النهاية للتحقق من التعريف. التخلص من هذا القيد
ممكن باستخدام النظرية التالية

١٠-١.٣ - نظرية: شرط كوشي لوجود النهاية: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ ،
ولتكن $P_0 \in \mathbb{R}^N$ نقطة تراكم لـ A ، يوجد $\ell \in \mathbb{R}$ بحيث يكون
 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \ell$ إذا وفقط إذا تحقق شرط كوشي

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P, Q \in A :$$

$$d_e(P, P_0) < \delta \quad \& \quad d_e(Q, P_0) < \delta \implies |f(P) - f(Q)| < \varepsilon$$

برهان -

$\implies$ نفرض أن $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \ell$ ، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى، من تعريف النهاية يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\forall P \in A : \quad d_e(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - \ell| < \varepsilon/2$$

لنفس هذه القيمة δ نجد أنه لأي عنصرين $P, Q \in A$ بحيث $d_e(P, P_0) < \delta, d_e(Q, P_0) < \delta$

$$|f(P) - f(Q)| \leq |f(P) - \ell| + |f(Q) - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

أي أن شرط كوشي متحقق.

$\Leftarrow$ نفرض لنحقق شرط كوشي. هدفنا هو إيجاد قيمة النهاية للدالة f عند P_0 . نأخذ $\varepsilon_1 > 0$.

من شرط كوشي يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث $P, Q \in A$ $d_e(P, P_0) < \delta_1, d_e(Q, P_0) < \delta_1$ يكون $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon_1$.
حيث أن P_0 نقطة تراكم لعناصر A فإنه توجد أكثر من نقطة $P \in A$ بحيث $d_e(P, P_0) < \delta_1$. نثبت نقطة $P_1 \in A, d_e(P_1, P_0) < \delta_1$ ونضع
 $a_1 = f(P_1) - \varepsilon_1$ و $b_1 = f(P_1) + \varepsilon_1$.

نأخذ $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/2$ ونختار δ_2 من شرط كوشي بحيث $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon_2$ لأي $P, Q \in A$
مسافة كل منهما عن P_0 أقل من δ_2 . نختار P_2 بحيث $d_e(P_2, P_0) < \min(\delta_1, \delta_2)$ ونضع
 $a_2 = f(P_2) - \varepsilon_2$ و $b_2 = f(P_2) + \varepsilon_2$. نلاحظ أن $a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1$. بتكرار ذلك
نلاحظ أننا نحصل على أعداد $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots, b_1 \geq b_2 \geq b_3 \dots$ بحيث

$$b_n - a_n < \varepsilon/2^n$$

بأخذ $\ell = \sup_n a_n$ يمكن إثبات أنها نهاية الدالة عند P_0 .

النهايات المتتالية والمسارات

قد تعطي بعض الأمثلة السابقة انطباعاً بأنه يمكن حساب النهايات للدوال في متغيرين بأخذ النهايات المتتالية

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$$

لكن هذا التصور غير صحيح كما يوضح المثال التالي

١١-١.٣- مثال: لكن $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. $P_0(0, 0)$. من السهل أن نرى أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ و $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$. لكن إذا أعطينا $\varepsilon < 1/2$ فلاي اختيار لقيمة $\delta > 0$ نجد أن النقطة $P(\delta/2, \delta/2)$ نحقق $f(P) = 1/2$ برغم أن $d_e(P, P_0) < \delta$ وبالتالي

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \neq 0$$

لكي نتمكن من دراسة الحالات التي لا توجد فيها النهاية $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ رغم وجود النهايات المتتالية سنستخدم مفهوم النهايات على مسار أو على منحنى، نبدأ أولاً بتعريف المسارات

١٢-١.٣- تعريف: المسارات: لتكن $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ نقول أن C هو مسار يؤرول إلى P_0 إذا كانت هناك دالتان متصلتان وأحاديتان $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث

$$\{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [0, 1]\} = C \quad (أ)$$

$$(\varphi(0), \psi(0)) = (x_0, y_0) \quad (ب)$$

وللتعبير عن المسار نكتب $C = (\varphi, \psi)$.

١٣-١.٣- أمثلة:

(أ) لتكن $P_0 = O$ هي نقطة الأصل ، نأخذ الدالتين

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t - 1 & t \in [1/2, 1] \\ 0 & t \in [0, 1/2] \end{cases}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [1/2, 1] \\ 2t & t \in [0, 1/2] \end{cases}$$

ف نجد أن مسار يؤرول إلى O على صورة خط منكسر كما في الشكل (a). بينما $C_2 = (\psi, \varphi)$ موضح في الشكل (b).

(٢) لتكن $P_0(x_0, y_0)$ أي نقطة . نأخذ الدالتين

$$\varphi(t) = x_0 + \alpha t, \quad \psi(t) = y_0 + \beta t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

فيكون المسار $C = (\varphi, \psi)$ عبارة عن قطعة مستقيمة أحد طرفيها P_0 كما في الشكل (c) .

(٣) السمار المحدد بالدالتين

$$\varphi(t) = t^{3/2}, \quad \psi(t) = t^{4/5}$$

هو مسار يؤول إلى نقطة الأصل كما في الشكل (d) .

١٤-١.٣- نظرية : وحدانية النهاية على جميع المسارات: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ، ولتكن $P_0 \in \mathbb{R}^2$ تحقق أنه يوجد $R > 0$ بحيث يكون $D_R(P_0) \setminus \{P_0\} \subset A$.
 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \ell$ إذا وفقط إذا كان لأي مسار $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [0, 1]\}$ يؤول إلى P_0 تكون $\lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi(t), \psi(t)) = \ell$.

برهان - سنثبت النظرية في حالة $\ell \in \mathbb{R}$.

برهان $\Rightarrow$ نفرض أن $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \ell$ ونأخذ مساراً $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [0, 1]\}$ يؤول إلى P_0 . من اتصال الدالتين φ, ψ يمكن استنتاج أن $(\varphi(t), \psi(t)) \rightarrow P_0$ عندما $t \rightarrow 0$. وبالتالي $\lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi(t), \psi(t)) = \ell$.

برهان $\Leftarrow$ نفرض أن $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \neq \ell$ يوجد إذن $\varepsilon_0 > 0$ ونقاط $P_1, P_2, \dots \in D_R(P_0) \setminus \{P_0\}$ بحيث $d_e(P_n, P_0) < 1/n$ بينما $|f(P_n) - \ell| > \varepsilon_0$. نصل بين P_n و P_{n+1} بقطعة مستقيمة فحصل على مسار يؤول إلى P_0 بينما لا يؤول صوره إلى ℓ بدقة أكثر: ليكن $P_n = (x_n, y_n)$. نضع

$$\varphi(t) = \begin{cases} n(n+1)(x_n - x_{n+1})(t - 1/n) + x_n & t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} n(n+1)(y_n - y_{n+1})(t - 1/n) + y_n & t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

من السهل إثبات أن φ, ψ دوال متصلة وأن $(\varphi(1/n), \psi(1/n)) = P_n$ مما يؤدي إلى

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi(t), \psi(t)) \neq \ell$$

الاستخدام الأساسي للنظرية السابقة هو في إثبات عدم وجود النهاية، ويتم ذلك حسب النتيجة الآتية:

١٥-١.٣- نتيجة: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^2$ ، ولتكن $P_0 \in \mathbb{R}^2$ تحقق أنه يوجد $R > 0$ بحيث يكون $D_R(P_0) \setminus \{P_0\} \subset A$.
إذا وجد مسارين $C_1 = (\varphi_1, \psi_1), C_2 = (\varphi_2, \psi_2)$ يؤول كل منهما إلى P_0 وكانت $\lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi_1(t), \psi_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi_2(t), \psi_2(t))$

فإن $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ غير موجودة.

١٦-١.٣- أمثلة:

(١) لتكن $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. $P_0 = O$. وليكن $C_m = (\varphi, \psi)$ هو المسار المعرف بالدالتين

$$\varphi(t) = t, \quad \psi(t) = mt, \quad m \in \mathbb{R}$$

نلاحظ أن

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi(t), \psi(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt^2}{t^2 + m^2t^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

وهي قيمة نعتمد على m ، أي أن النهاية تختلف باختلاف المسار وبالتالي فإن $\lim_{P \rightarrow O} f(P)$ غير موجودة .

(٢) لتكن $f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^3}$ ، $P_0 = O$ ، وليكن $C_a = (\varphi, \psi)$ هو المسار المعرف بالدالتين

$$\varphi(t) = t, \quad \psi(t) = \sqrt[3]{at^4 - t^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

نلاحظ أن

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi(t), \psi(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(at^4 - t^2)}{t^2 + at^4 - t^2} = \frac{-1}{a}$$

وهي قيمة نعتمد على a ، أي أن النهاية تختلف باختلاف المسار وبالتالي فإن $\lim_{P \rightarrow O} f(P)$ غير موجودة .

١٧.٣ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

(١) نهاية الدالة $f(x, y)$ عند $P_0(x_0, y_0)$ تكون معرفة إذا كانت
 $P_0 \in \text{dom}(f)$ $\left(\begin{array}{l} \text{نقطة حدودية لـ } \text{dom}(f) \\ \text{نقطة تراكم لـ } \text{dom}(f) \end{array} \right)$
 $\text{dom}(f)$ $\left(\begin{array}{l} \text{نقطة داخلية لـ } \text{dom}(f) \\ \text{نقطة تراكم لـ } \text{dom}(f) \end{array} \right)$

(٢) وجود نهاية للدالة $f(x, y)$ عند $P_0(x_0, y_0)$
 $\left(\begin{array}{l} \text{يستلزم وجود النهاية } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \text{ لكل } y \\ \text{يستلزم وجود النهاية } \lim_{P \rightarrow P_1} f(x, y) \text{ لكل } P_1 \in \text{dom}(f) \\ \text{يستلزم وجود النهاية } \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \\ \text{ينتج من وجود النهاية } \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \end{array} \right)$

(٣) إذا كانت $\lim_{P \rightarrow P_1} f(P) = \ell_1$ و $\lim_{P \rightarrow P_2} f(P) = \ell_2$ فإن
 $\ell_1 \neq \ell_2$ يستلزم $P_1 \neq P_2$ $\left(\begin{array}{l} P_1 = P_2 \\ P_1 \neq P_2 \end{array} \right)$
 $P_1 = P_2$ يستلزم $\ell_1 \neq \ell$ $\left(\begin{array}{l} P_1 \neq P_2 \\ P_1 = P_2 \end{array} \right)$

١٨.٣ تمارين

(١) إدرس نهاية كل من الدوال الآتية عند النقطة المعطاة

$$.a, b \in \mathbb{R} \text{ حيث } P_0(x_0, y_0) \text{ عند } f(x, y) = ax + by \quad (ا)$$

$$.P_0 = (0, 0) \text{ عند } f(x, y) = \frac{x}{x-y} \quad (ب)$$

$$.P_0 = (1, 1) \text{ عند } f(x, y) = \frac{(x-1)^2}{x^2-y^2} \quad (ج)$$

$$.P_0 = (1, -1) \text{ عند } f(x, y) = \frac{x^3-1}{x^3+y^3} \quad (د)$$

$$.P_0 = (0, 0) \text{ عند } f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} \quad (هـ)$$

$$.P_0 = (0, 0) \text{ عند } f(x, y) = \frac{x^2y^3}{x^4+y^3} \quad (و)$$

$$.P_0 = (0, 0) \text{ عند } f(x, y) = \frac{xy^2}{x^{3/2}+y^2} \quad (ز)$$

$$.\alpha, \beta > 0 \text{ حيث } P_0 = (0, 0) \text{ عند } f(x, y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^{2\alpha} + y^{2\beta}} \quad (ح)$$

$$.P_0 = (0, 0) \text{ عند } f(x, y) = \cos\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \sin\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) \quad (ط)$$

$$.P_0 = (0, 0) \text{ عند } f(x, y) = \cos(x+y) \sin\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \quad (ي)$$

$$.P_0 = (0, 0) \text{ عند } f(x, y) = \cos\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \sin(x+y) \quad (يا)$$

$$.P_0 = (0, 0) \text{ عند } f(x, y) = \cos\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \tan(x + \pi/4) \quad (يب)$$

(٢) نقول أن دالة $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}^N$ محدودة على B إذا وجد عدد M بحيث

$$\forall P \in B : |f(P)| \leq M$$

برهن أنه إذا كانت الدالة لها نهاية حقيقية عند P_0 فإنه يوجد كرة $B_r(P_0)$ بحيث تكون f محدودة على $B_r(P_0) \cap A$.

(٣) برهن أنه إذا كانت $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ وكانت f دالة محدودة على A و $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = 0$ فإن $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)g(P) = 0$.