

## ٣.١ المنحنيات البارامترية

### المنحنيات

رأينا في الفصل السابق أننا نستطيع التعبير عن الخط المستقيم في المستوى بمعادلتين بارامتريتين على الصورة:

$$x = x_0 + \lambda a, \quad y = y_0 + \lambda b, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

وكذلك يمكن التعبير عن الخط المستقيم في الفراغ ثلاثي الأبعاد بثلاث معادلات بارامترية.

في الحقيقة أننا نستطيع التعبير عموماً عن منحنى في الفراغ  $\mathbb{R}^2$  أو  $\mathbb{R}^3$  أو  $\mathbb{R}^N$  بمعادلات بارامترية، ولنر المثال التالي:

١-١ - أمثلة:

(١) يتم إصلاح مضمار لسباق السيارات على شكل دائرة طول قطرها: 36000 متر. المهندس المسئول يحدد موقع فريق الإصلاح بالإحداثيات الكارثيزية التي نقطة أصلها مركز الدائرة وذلك عن طريق المعادلتين:

$$[0, 2\pi[ \ni \theta, \quad y = 18000 \sin \theta, \quad x = 18000 \cos \theta$$

هاتين المعادلتين نعطيان تمثيلاً بارامترياً للدائرة.

(٢) في سباق في نفس المضمار السابق استخدمت آلة رقمية لمتابعة السباق، نحدد تلك الآلة إحداثيات نقطة على بعد  $s$  متر من نقطة البدء، بالمعادلات:

$$[0, 36000\pi[ \ni s, \quad y = 18000 \sin\left(\frac{s}{18000}\right) - 18000, \quad x = 18000 \cos\left(\frac{s}{18000}\right)$$

نعطي هاتين المعادلتين تمثيلاً بارامترياً آخر للدائرة.

(٣) في نفس السباق كان الفائز يجري بسرعة نعطى بالمعادلات:

$$[0, 585.37[ \ni t, \quad y = 18000 \sin\left(2 + \frac{t^2}{80000}\right) - 18000, \quad x = 18000 \cos\left(2 + \frac{t^2}{80000}\right)$$

حيث  $t$  تمثل الزمن بالثواني من بدء السباق. هذه المعادلات نعطى تمثيلاً بارامترياً مختلفاً لنفس الدائرة.

(٤) الدالة التالية تمثل منحنى دائرة الوحدة في  $\mathbb{R}^2$

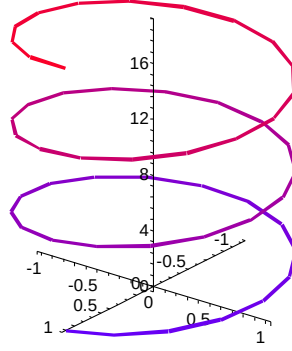
$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} (1 - 4t, \sqrt{8t - 16t^2}) & t \in [0, 1/2] \\ (4t - 3, -\sqrt{24t - 16t^2 - 8}) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

(٥) كل من الدالتين التاليتين

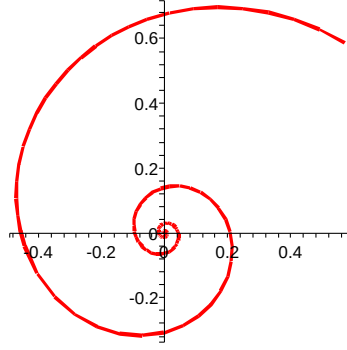
$$t \in [0, 1] \text{ حيث } \mathbf{F}(t) = (t + 1, 2t - 1, t), \quad G(t) = (t^2 + 1, 2t^2 - 1, t^2)$$

يمثل القطعة المستقيمة الواصلة بين  $P(1, -1, 0)$  و  $Q(2, 1, 1)$ .

(٦) المنحنى  $\mathbf{F}(t) = (\cos 6\pi t, \sin 6\pi t, 6\pi t)$  حيث  $t \in [0, 1]$  يمثل بالشكل التالي



(٧) المنحنى  $\mathbf{F}(t) = (e^{-t} \cos 4t, e^{-t} \sin 4t, 0)$  حيث  $t \in [0, +\infty[$  هو منحنى مستوي ويمثل الحلزون



لدراسة المنحنيات نحتاج لبعض مفاهيم التفاضل

٢-١- تعريف: لتكن  $\mathbf{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  حيث  $I$  فترة ، ولنضع  $\mathbf{F}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

(أ)  $\mathbf{F}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  هي مشتقة المنحنى  $\mathbf{F}$ .

(ب) إذا كانت  $\mathbf{F}'(t) \neq \vec{0}$  لكل  $t \in I$  فإننا نقول أن المنحنى  $\mathbf{F}$  منحنى منتظم.

(ج) إذا كان  $\|\mathbf{F}'(t)\| = 1$  لكل  $t \in I$  فإننا نقول أن المنحنى ممثل بامتريا بطول القوس.

(د) الدالة المتجهة  $T(t) = \mathbf{F}'(t) / \|\mathbf{F}'(t)\|$  تسمى متجه الوحدة المماسي للمنحنى.

(هـ) ليكن  $\mathbf{F}$  منحنى منتظم وممثل بامتريا بطول القوس ، الدالة الحقيقية في متغير واحد  $k(t) = \|T'(t)\|$  تسمى انحناء المنحنى.

إذا كانت  $\mathbf{F}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  فإن طول المنحنى عندما  $t \in [a, b]$  يعطى بالعلاقة

$$L = \int_a^b \|\mathbf{F}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

ويوضح هذا مغزى التسميات في التعريف السابق.

٣-١ - أمثلة:

(١) الدالتان

$$t \in [0, 1] \text{ حيث } \mathbf{F}(t) = (t + 1, 2t - 1, t),$$

$$t \in [0, \sqrt{6}] \text{ حيث } G(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}t + 1, \frac{2}{\sqrt{6}}t - 1, \frac{1}{\sqrt{6}}t\right)$$

نمثلان نفس القطعة المستقيمة، وبحساب المشتقة نجد أن

$$\|\mathbf{F}'(t)\| = \sqrt{6} \neq 1, \quad \|G'(t)\| = 1$$

إي أن  $G$  فقط هي التي تمثل القطعة المستقيمة بارامتريا بطول القوس .  
إنحنا،  $G$  هو  $k(t) = 0$  ، ويعبر هذا عن استقامة المنحنى  $G$ .

(٢) المنحنى  $\mathbf{F}(t) = \left(\frac{1}{6\sqrt{2}\pi} \cos 6\pi t, \frac{1}{6\sqrt{2}\pi} \sin 6\pi t, \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$  حيث  $t \in [0, 6\sqrt{2}\pi]$  ممثل بارامتريا بطول القوس ، وانحناءه  $k(t) = 18\pi^2$  ثابت. حاول أن ندرك ذلك من شكل المنحنى.

(٣) المنحنى  $\mathbf{F}(t) = (e^{-t} \cos 4t, e^{-t} \sin 4t, 0)$  حيث  $t \in [0, +\infty[$  ليس ممثل بارامتريا بطول المنحنى.

$$\text{ويكون } T(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}(\cos 4t + 4 \sin 4t), \frac{1}{\sqrt{17}}(-\sin 4t + 4 \cos 4t), 0\right)$$

#### ٤.١ تمارين.

(١) ليكن  $\mathbf{F}(t)$  منحنى في الفراغ الثلاثي وليكن  $\vec{u}$  متجه وحدة

(أ) ماذا تعلم عن المنحنى إذا كان  $\vec{u} \cdot \mathbf{F}(t) = 0$  لكل  $t$  ؟

(ب) ماذا تعلم عن المنحنى إذا كان  $\vec{u} \cdot \mathbf{F}(t) = c$  لكل  $t$  (حيث  $c$  ثابت) ؟

(ج) ماذا تعلم عن المنحنى إذا كان  $\vec{u} \cdot \mathbf{F}(t) = a \|\mathbf{F}(t)\|$  لكل  $t$  حيث  $a$  ثابت  $0 < a < 1$  ؟

(٢) ليكن  $\mathbf{F}, \mathbf{G} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  دالتان اتجاهيتان ، برهن أن

$$(\mathbf{F} + \mathbf{G})'(t) = \mathbf{F}'(t) + \mathbf{G}'(t) \quad (\text{أ})$$

$$(\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t))' = \mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}'(t) \quad (\text{ب})$$

$$(\mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t))' = \mathbf{F}'(t) \times \mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}'(t) \quad (\text{ج})$$

(٣) إدرس التمثيل البارامترى والانحناء لكل من المنحنيات البارامترية الآتية

$$t \in [0, 1] \text{ حيث } \mathbf{F}(t) = (t^2, 2t^2 + 3, 3t^2) \quad (\text{أ})$$

$$t \in [-1, 0] \text{ حيث } \mathbf{F}(t) = (t, (t+1), \sqrt{1 - (t+1)^2 - t^2}) \quad (\text{ب})$$

$$t \in \left[\frac{-6-12\sqrt{3}}{13}, \frac{-6+12\sqrt{3}}{13}\right] \text{ حيث } \mathbf{F}(t) = (t, (t+1), \sqrt{1 - (t+1)^2/4 - t^2/9}) \quad (\text{ج})$$

(د)  $\mathbf{F}(t) = (t, (t+1), \sqrt{1 + (t+1)^2 + t^2})$  حيث  $t \in [0, +\infty[$

(هـ)  $\mathbf{F}(t) = (t, 2(t+1), \sqrt{1 - 4(t+1)^2 + t^2})$

(و)  $\mathbf{F}(t) = (t^2, (t+1), 1 - (t+1)^2 + (t-1)^2)$

(ز)  $\mathbf{F}(t) = (t, \sin t, \csc t)$

(٤) برهن أن الدائرة التي نصف قطرها  $r$  يكون انحناءها ثابت يساوي  $1/r$ .

(٥) أوجد إنحناء القطع الناقص  $(t, \sqrt{1-t^2}/2, 0)$ .

(٦) إدرس إنحناء الملف  $(r \cos wt, r \sin wt, ct)$  بدلالة  $c, w, r$ .

(٧) جسيم كتلته  $m$  ومشحون بشحنة كهربائية  $q$  يتحرك بسرعة  $\vec{v}$  في مجال مغناطيسي معطى بالمتجه  $\vec{B} = (0, 0, b)$ ، القوة المؤثرة على الجسيم تتحدد على الصورة

$$\vec{F} = (q/c) \vec{v} \times \vec{B}$$

حيث  $c$  هي سرعة الضوء

أوجد مسار الجسيم  $\sigma(t)$  كدالة في الزمن، وأعط وصفا هندسيا للمسار.

(٨) برهن أنه إذا كان إنحناء منحنى ما يساوي الصفر دائما، فإن المنحنى عبارة عن خط مستقيم.

## ٤.١ المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}^N$

سنعرض في هذا الفصل بعض خواص المجموعات الجزئية في  $\mathbb{R}^N$  وسنركز في عرضنا على تقديم المفاهيم الأساسية وأمثلة عليها دون الإكثار من البراهين

**المجموعات المحدودة وغير المحدودة**

**٥-١- تعريف:** لتكن  $A \subset \mathbb{R}^N$ ، نقول أن  $A$  مجموعة محدودة bounded set إذا وجد نقطة  $P$  وعدد  $r > 0$  بحيث  $A \subset B_r(P)$ .

### ٦-١ - خواص المجموعات المحدودة:

(١) في  $\mathbb{R}^2$ : أي قرص وأي مستطيل يكون مجموعة محدودة، بينما مجموعة النقاط التي تقع على محور  $X$  ليست محدودة.

(٢) إذا كانت  $A$  مجموعة محدودة وكانت  $B \subset A$  فإن  $B$  بدورها محدودة.

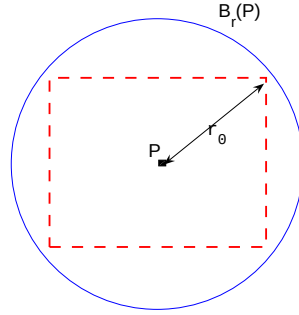
(٣) إذا كانت كل من  $A, B$  مجموعة محدودة فإن  $A \cup B$  محدودة.

(٤) أي مجموعة  $A \subset \mathbb{R}^N$  تكون محدودة إذا وفقط إذا كان

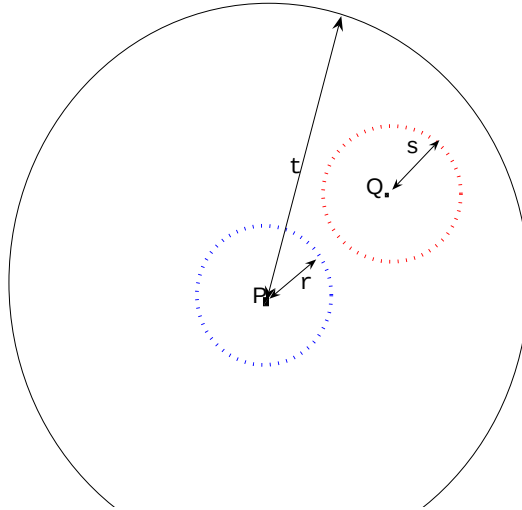
$$\sup\{d_e(P, Q) \mid P, Q \in A\} < +\infty$$

## برهان - سنبرهن بعض الخواص

(١) ليكن  $R$  مستطيل ، وليكن  $P$  هي نقطة تقاطع قطريه و  $a, b$  هما بعدي المستطيل . نضع  $r_0 = \sqrt{a^2 + b^2}/2$  فمن السهل أن نلاحظ أن لأي  $Q \in \mathbb{R}$  يكون  $d_e(P, Q) \leq r_0$  (أنظر الشكل) . وبالتالي لأي  $r > r_0$  يتحقق أن  $R \subset D_r(P)$  وهو ما يثبت أن  $R$  مجموعة محدودة.



(٢) لتكن  $A \subset B_r(P)$  ،  $B \subset B_s(Q)$  . فيكون  $A \cup B \subset B_t(P)$  حيث  $t = r + s + d_e(P, Q)$  كما هو موضح بالشكل التالي:



## المجموعات المفتوحة والمغلقة

٧-١- تعريف: لتكن  $A \subset \mathbb{R}^N$  ولتكن  $P \in \mathbb{R}^N$  ،

(أ) نقول أن  $P$  نقطة داخلية interior point في  $A$  إذا وجد عدد  $r > 0$  بحيث  $B_r(P) \subset A$

(ب) نقول أن  $P$  نقطة حدودية boundary point لـ  $A$  إذا كان لأي عدد  $r > 0$ :  $B_r(P) \not\subset A$  وأيضا  $B_r(P) \not\subset \mathbb{R}^N \setminus A$

(ج) نقول أن  $A$  مجموعة مفتوحة open set إذا كانت جميع عناصرها نقاط داخلية فيها.

(د) نقول أن  $A$  مجموعة مغلقة closed set إذا احتوت جميع نقاطها الحدودية.

#### ٨-١- بعض الخواص الأساسية للمجموعات المفتوحة والمغلقة:

(١) النقاط الداخلية لأي قرص مركزه  $P$  ونصف قطره  $r$  هي نقاط القرص المفتوح  $D_r(P)$ .

(٢) النقاط الحدودية لأي قرص مركزه  $P$  ونصف قطره  $r$  هي النقاط الواقعة على الدائرة المحيطة بالقرص.

(٣) القرص المفتوح هو مجموعة مفتوحة، والقرص المغلق هو مجموعة مغلقة.

(٤) اتحاد إي عدد من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

(٥) تقاطع مجموعتين مفتوحتين هو مجموعة مفتوحة.

(٦) مكمل أي مجموعة مفتوحة هو مجموعة مغلقة.

(٧) تقاطع إي عدد من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

(٨) اتحاد مجموعتين مغلقتين هو مجموعة مغلقة.

(٩) المجموعة  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  ليست مفتوحة ولا مغلقة، ومثلها الكثير.

#### البرهان متروك كتمرين للقارئ -

#### ٩-١ - أمثلة:

(أ) المجموعة  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$  مغلقة، ومكملتها  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$  مجموعة مفتوحة. لإثبات ذلك نأخذ  $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$  ونلاحظ أن  $r = d(P, \Delta)$  (المسافة بين  $P$  والخط المستقيم  $\Delta$ ) تكون موجبة، وأن  $D_r(P) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$  وهو ما يثبت أن  $P$  نقطة داخلية في  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ .

$\Delta \setminus \mathbb{R}^2$ . أثبتنا إذن أن أي نقطة من نقاط هذه المجموعة هي نقطة داخلية، إذن المجموعة مفتوحة.

(٢) المستطيل  $A = [a, b[ \times ]c, d[$  ليس مغلقا، لأن أي نقطة  $(b, y)$  حيث  $c \leq y < d$  هي نقطة حدودية لـ  $A$  ولا تنتمي لها. أيضا النقاط على الصورة  $(a, y)$  حيث  $c \leq y < d$  هي عناصر في  $A$  لكنها ليست نقاط داخلية، بالتالي  $A$  ليست مفتوحة.

(٣) المجموعة  $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0 \}$  مجموعة مفتوحة، لإثبات ذلك نأخذ  $P(x_0, y_0, z_0) \in A$  ونضع  $r = \min(x_0, y_0, z_0)$  فنجد أن  $r > 0$  و  $B_r(P) \subset A$  وذلك لأن

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) \in B_r(P) &\implies \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r \\ &\implies |x - x_0| < r \quad \& \quad |y - y_0| < r \quad \& \quad |z - z_0| < r \\ &\implies |x - x_0| < x_0 \quad \& \quad |y - y_0| < y_0 \quad \& \quad |z - z_0| < z_0 \\ &\implies x > 0 \quad \& \quad y > 0 \quad \& \quad z > 0 \end{aligned}$$

١٠.١ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

- (١) أي مجموعة محدودة في  $\mathbb{R}^2$
- |     |                 |
|-----|-----------------|
| ( ) | ليست قرصا       |
| ( ) | هي قرص          |
| ( ) | محتواة في قرص   |
| ( ) | تحتوي قرص مفتوح |
- (٢) أي مجموعة منتهية في  $\mathbb{R}^3$
- |     |                 |
|-----|-----------------|
| ( ) | تكون مفتوحة     |
| ( ) | تكون محدودة     |
| ( ) | لا تكون مغلقة   |
| ( ) | هي عبارة عن كرة |
- (٣) أي مجموعة مغلقة في  $\mathbb{R}^N$
- |     |                            |
|-----|----------------------------|
| ( ) | تحتوي مجموعة مفتوحة        |
| ( ) | لا يمكن أن تكون مفتوحة     |
| ( ) | تكون غير خالية             |
| ( ) | تكون جزءا من مجموعة مفتوحة |
- (٤) أي مجموعة مفتوحة في  $\mathbb{R}^N$
- |     |                           |
|-----|---------------------------|
| ( ) | تحتوي مجموعة مغلقة        |
| ( ) | لا يمكن أن تكون مغلقة     |
| ( ) | تكون غير خالية            |
| ( ) | تكون جزءا من مجموعة مغلقة |

## ١١.١ تمارين

(١) إدرس ما إذا كانت كل من المجموعات الآتية محدودة أم غير محدودة

- (أ)  $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$
- (ب)  $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^3 = 1 \}$
- (ج)  $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y \}$
- (د)  $A = \{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 1, \theta < \pi \}$
- (هـ)  $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 + 1 \}$
- (و)  $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - y| < z < 1 \}$
- (ز)  $A = \{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho < \varphi \}$

(٢) برهن أن أي مستوى في  $\mathbb{R}^3$  يكون مجموعة مغلقة وغير محدودة.

(٣) أوجد جميع التقاط الحدودية لكل من المجموعات التالية.

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \} \quad (ا)$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x + y < 1 \} \quad (ب)$$

$$A = \{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geq 1, |\theta - \pi| < \pi/4 \} \quad (ج)$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \sin(1/x), 0 < x \} \quad (د)$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x + y) = 0 \} \quad (هـ)$$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < |z| \leq 1 \} \quad (و)$$

(٤) إدرس ما إذا كانت كل من المجموعات التالية مفتوحة أو مغلقة أو غير ذلك.

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \} \quad (ا)$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x + y < 1 \} \quad (ب)$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1 \} \quad (ج)$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x + 1|, |y - 1|) \leq 2 \} \quad (د)$$

$$A = \{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geq 1, |\theta - \pi| < \pi/4 \} \quad (هـ)$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \sin(1/x), 0 < x \} \quad (و)$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x + y) = 0 \} \quad (ز)$$

$$A = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{(1, -1)} = 0 \} \quad (ح)$$

$$A = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{(1, 1)} = -1 \} \quad (ط)$$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < |z| \leq 1 \} \quad (ي)$$

$$A = \{ (x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \} \quad (يا)$$

(هـ) برهن أنه إذا كانت  $A$  مجموعة مفتوحة في  $\mathbb{R}^3$  وكانت  $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, 0) \in A \}$  فإن  $B$  مجموعة مفتوحة في  $\mathbb{R}^2$ . هل يمكن إثبات نتيجة مشابهة للمجموعات المغلقة؟

## ٥.١ الدوال في متغيرين وثلاثة متغيرات وتمثيلها البياني

من المعتاد أن نتعرف على خواص أي دالة حقيقية في متغير واحد من خلال دراسة المنحنى البياني لتلك الدالة (١)، وفي حالة الدالة في متغيرين يمكن أن نفعل الشيء نفسه بالتعامل مع السطح الممثل للدالة حيث نمثل الدالة بنقاط في الفراغ ثلاثي الأبعاد بحيث يكون الإحداثي الرأسى للنقطة هو قيمة الدالة عند العنصر الممثل بالإحداثيين الأولين.

١٢-١- تعريف: لتكن  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  حيث  $A \subset \mathbb{R}^2$  ، السطح الممثل للدالة  $f$  (graph of  $f$ ) هو مجموعة النقاط

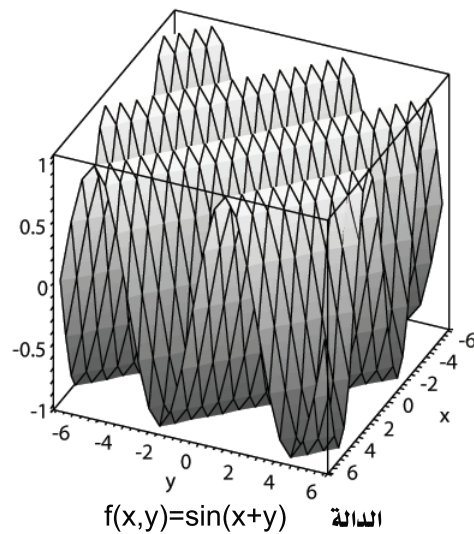
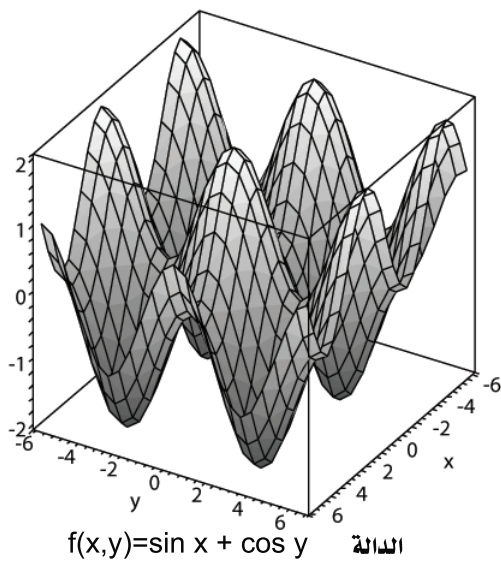
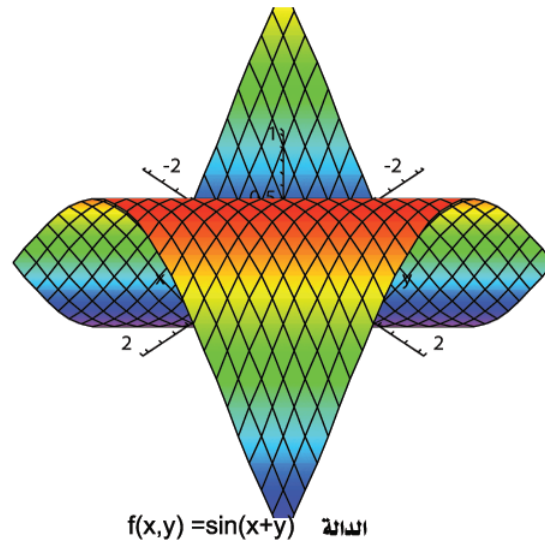
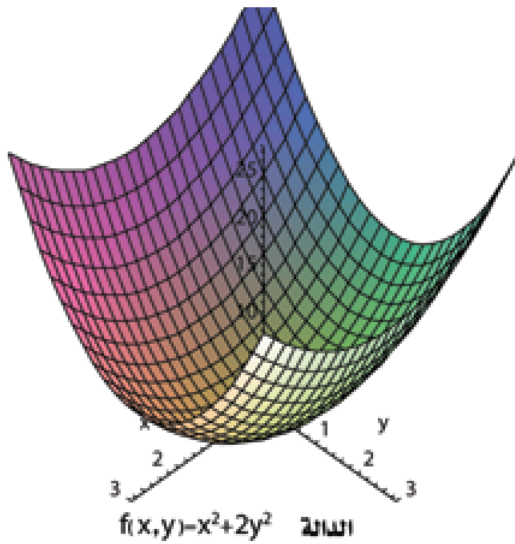
$$G(f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \text{ و } z = f(x, y) \}$$

بالمثل : إذا كانت  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  حيث  $A \subset \mathbb{R}^3$  فإن مجموعة النقاط

$$G(f) = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z) \in A \text{ و } t = f(x, y, z) \}$$

تسمى التمثيل البياني للدالة .

يمكن باستخدام برامج الرسم البياني على الحاسب أن نرسم السطوح الممثلة للدوال ، ونرى فيما يلي بعض الأمثلة لتلك الرسومات



يمكن أيضا دراسة تلك السطوح من خلال منحنيات الارتفاع والانخفاض وهي منحنيات

تمثل تقاطع السطح الممثل للدالة مع مستويات أفقية على إرتفاعات مختلفة ،

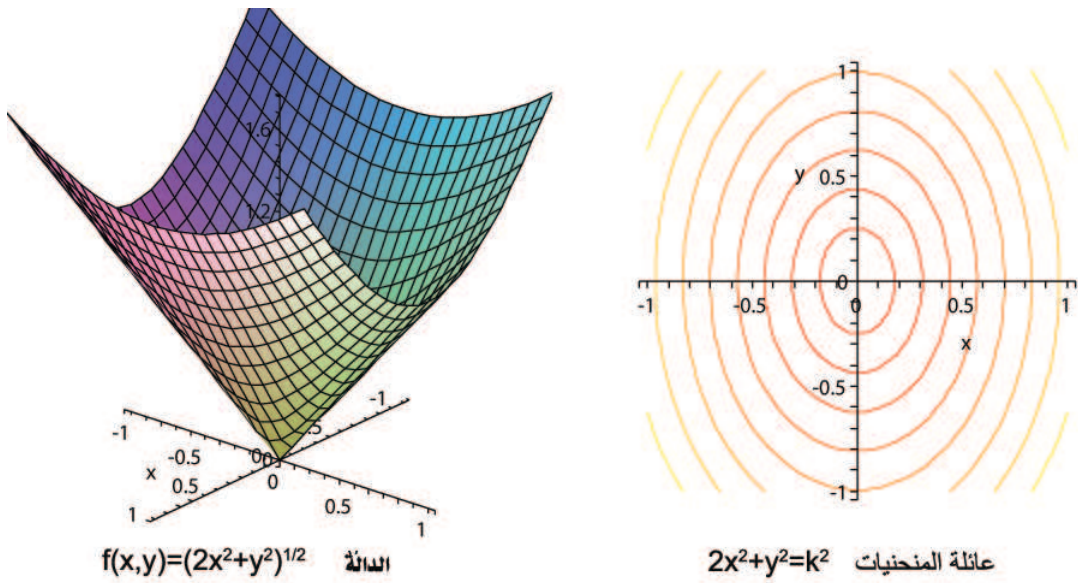
$$C_k(f) = \{ (x, y) \in A \mid f(x, y) = k \}$$

وتبين الأمثلة التالية كيفية التعرف على السطح بواسطة منحنيات الارتفاع والانخفاض.  
١٣-١ - أمثلة:

(١) لتكن  $f(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$  ، نأخذ  $k > 0$  وندرس منحنيات الارتفاع والانخفاض. فنجد

$$C_k(f) = \{ (x, y) \in A \mid a^2x^2 + b^2y^2 = k^2 \}$$

ونعلم من دراستنا السابقة للهندسة التحليلية أن هذه المعادلة تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وأطوال محوريه  $k/a$  و  $k/b$



وبرسم هذه المنحنيات كما لو كانت مرسومة فوق بعضها نجد أن السطح الممثل للدالة هو مخروط قائم رأسه عند نقطة الأصل ومحوره هو محور  $z$  ومقطعه الأفقي على شكل قطع ناقص .

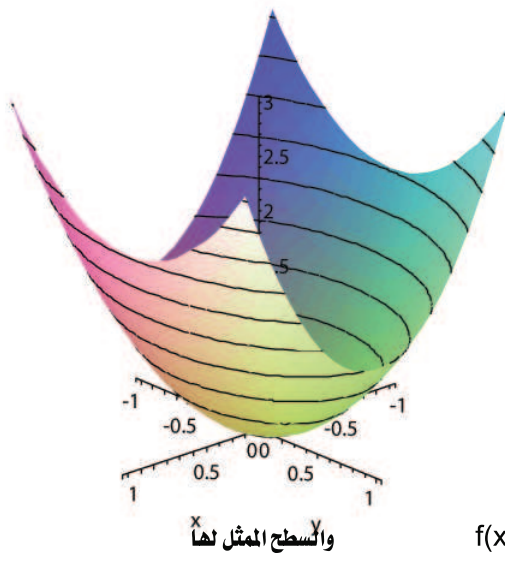
(٢) نفرض أن لدينا دالة نعلم أن منحنيات الارتفاع والانخفاض لها عبارة عن قطوع ناقصة على الصورة

$$C_k(f) = \{ (x, y) \in A \mid a^2x^2 + b^2y^2 = k \}$$

تختلف هذه المنحنيات عن المثال السابق في أن أطوال محاور القطع الناقص تتناسب مع  $\sqrt{k}$  وليس مع  $k$  ، ويمكن إيجاد الدالة بوضع  $f(x, y) = k = a^2x^2 + b^2y^2$  ، أيضا يمكن إيجاد تقاطع السطح الممثل لهذه الدالة مع المستوى الرأسي  $ax + by = 0$  بحل المعادلتين  $z = a^2x^2 + b^2y^2$  ،  $\alpha x + \beta y = 0, \beta \neq 0$  معا فنجد أن منحنى التقاطع يحقق المعادلة

$$z = (a^2 + \frac{b^2\beta^2}{\alpha^2})x^2$$

وهي معادلة قطع مكافئ في المستوى ، من ذلك نستنتج أن السطح الممثل للدالة  $f$  هو سطح مكافئ ذو مقطع ناقص .



$$f(x,y)=2x^2+y^2$$

