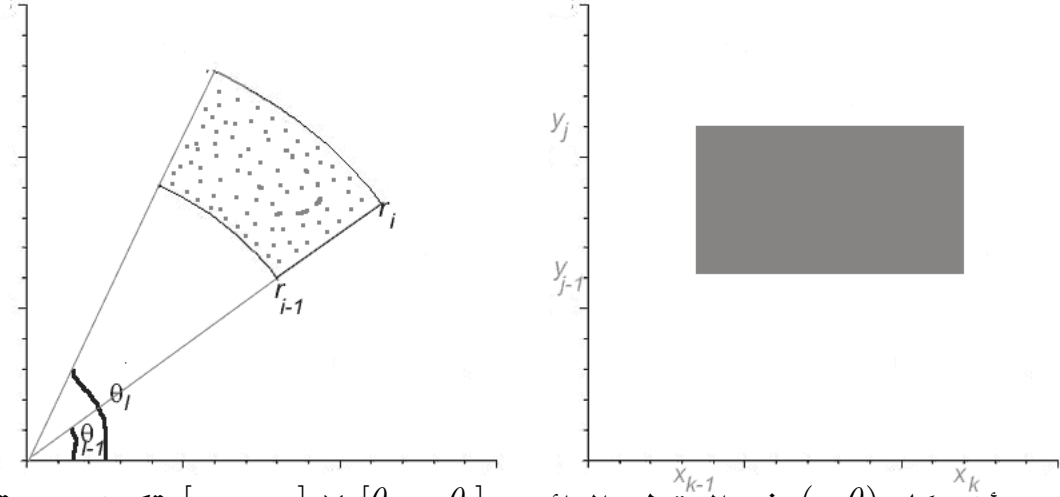


٣.٤ التحويلات والتكامل بالتعويض

من المهم في حساب التكامل أن ندرس تأثير تحويل المتغيرات على التكامل، مثلاً: لو كانت لدينا دالة $f(x, y)$ قابلة للتكامل على منطقة $D \subset \mathbb{R}^2$ وأردنا التعبير عن $f(x, y)$ بالإحداثيات القطبية $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ فكيف نحسب قيمة التكامل كتكامل في (r, θ) ؟

للإجابة على هذا السؤال سنبدأ بإعادة حساب تجميعات ريمان لدالة $f(x, y)$ على مستطيل M بعد التعويض بالإحداثيات القطبية. لنأخذ مستطيل صغير $M_{k,j} [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ من تجزئة P لـ M ، ولندرس الأزواج المرتبة (r, θ) التي تحقق أن $(r \cos \theta, r \sin \theta) \in D$



ف نجد أن كل (r, θ) في المقطع الدائري $[r_{i-1}, r_i] \times [\theta_{l-1}, \theta_l]$ تكون صورته في المستطيل الصغير $M_{k,j}$ ، من الواضح أيضاً أن مساحة المقطع الدائري تساوي تقريباً مساحة المستطيل $M_{k,j}$ ومساحة هذا المقطع هي $(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})(\theta_l - \theta_{l-1})/2$ يمكننا إذن أن نكتب

$$\mathcal{R}(f, P) \approx \sum_i \sum_l f(r_{i-1} \cos \theta_{l-1}, r_{i-1} \sin \theta_{l-1}) (r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})(\theta_l - \theta_{l-1})/2$$

ونستنتج من ذلك النظرية التالية:

٣.٤-١- نظرية تحويل التكامل الثنائي للإحداثيات القطبية: لتكن f دالة قابلة للتكامل على مجموعة محدودة $D \subset \mathbb{R}^2$ ، ولتكن $E = \{ (r, \theta) \mid (r \cos \theta, r \sin \theta) \in D \}$ فإن

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \iint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d(r, \theta)$$

برهان. --- كما سبق: نكتب تجميع ريمان للدالة f على الصورة

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f, P) &= \sum_{j,k} f(Q_{j,k}) \text{Area}(M_{k,j}) \\ &= \sum_i \sum_l f(r_{i-1} \cos \theta_{l-1}, r_{i-1} \sin \theta_{l-1}) \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right) (r_i - r_{i-1})(\theta_l - \theta_{l-1}) \end{aligned}$$

حيث $r_{k,j} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2}$ ، $Q_{k,j} = (r_{k,j} \cos \theta_{k,j}, r_{k,j} \sin \theta_{k,j})$ ونلاحظ أن هذا التجميع يمكن اعتباره تجميع ريمان للدالة

$$g(r, \theta) = r f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

على E . من ذلك ينتج المطلوب.

٣.٤ - أمثلة:

(١) لتكن $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $D = \{(x, y) | x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. من السهل حساب التكامل f على نصف القرص D بالتحويل إلى الإحداثيات القطبية:

$$\begin{aligned} \int \int_D f(x, y) d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^\pi f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi r^2 d\theta dr = \pi/3. \end{aligned}$$

(٢) لتكن $g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ و $D = D(0; R)$. لحساب التكامل $\int \int_D f(x, y) d(x, y)$ نستخدم التحويل للإحداثيات القطبية:

$$\begin{aligned} \int \int_D f(x, y) d(x, y) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta dr = \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

النظرية السابقة حالة خاصة من النظرية العامة التالية (التي نعطياها هنا بدون برهان):

٣.٤ - نظرية التكامل بالتعويض لدالة في متغيرين: لتكن f دالة قابلة للتكامل على مجموعة محدودة $D \subset \mathbb{R}^2$ ، ولتكن $T : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ تحويلًا قابلاً للاشتقاق على E حيث:

$$E = T^{-1}(D) = \{(u, v) | T(u, v) \in D\}.$$

إذا كانت مصفوفة جاكوبي للتحويل T غير شاذة لكل $(u, v) \in E$ فإن

$$\int \int_D f(x, y) d(x, y) = \int \int_E f(T(u, v)) | \det(J(T)(u, v)) | d(u, v)$$

ولدينا كذلك نظرية مماثلة للتكامل الثلاثي:

٤.٣.٤- نظرية التكامل بالتعويض لدالة في ثلاثة متغيرات: لتكن f دالة قابلة للتكامل على مجموعة محدودة $D \subset \mathbb{R}^3$ ، ولتكن $T : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ تحويلية قابلة للاشتقاق على E حيث:

$$E = T^{-1}(D) = \{ (u, v, w) \mid T(u, v, w) \in D \}.$$

إذا كانت مصفوفة جاكوبي للتحويل T غير شاذة لكل $(u, v) \in E$ فإن

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) d(x, y, z) \\ = \iiint_E f(T(u, v, w)) | \det(J(T)(u, v, w)) | d(u, v, w) \end{aligned}$$

ومن هذه النظريات وبملاحظة أن مصفوفة جاكوبي لتحويلية خطية T تكون ثابتة، فإننا نستنتج:

٤.٣.٥- نتيجة: محدد التحويلية الخطية يمثل تناسباً بين المساحات أو الحجوم:

(أ) لتكن $D \subset \mathbb{R}^2$ منطقة ذات مساحة، ولتكن $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ تحويلية خطية، فإن:

$$\text{Area}(D) = | \det(J(T)) | \text{Area}(E)$$

حيث:

$$E = T^{-1}(D) = \{ (u, v) \mid T(u, v) \in D \}.$$

(ب) لتكن $D \subset \mathbb{R}^3$ منطقة ذات حجم، ولتكن $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ تحويلية خطية، فإن:

$$\text{Vol}(D) = | \det(J(T)) | \text{Vol}(E)$$

حيث:

$$E = T^{-1}(D) = \{ (u, v) \mid T(u, v) \in D \}.$$

لهذه النظريات تطبيقات عديدة نعطي منها :

٤.٣.٦ - تطبيقات:

(أ) حساب التكامل الثلاثي باستخدام الإحداثيات الأسطوانية: لتكن $C(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ التحويل من الإحداثيات الأسطوانية للإحداثيات الكارتيذية. نحسب مصفوفة جاكوبي لهذه التحويلية:

$$J(C)(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومحددها

$$\det(J(C)(r, \theta, z)) = r.$$

بالتالي فإنه لأي دالة f قابلة للتكامل على منطقة $D \subset \mathbb{R}^3$ يكون

$$\int \int \int_D f(x, y, z) d(x, y, z) = \int \int \int_E f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r d(r, \theta, z).$$

حيث $E = \{ (r, \theta, z) \mid (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in D \}$

(٢) حساب التكامل الثلاثي باستخدام الإحداثيات الكروية: بالمثل، لتكن

$$S(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$$

التحويل من الإحداثيات الكروية للإحداثيات الكاريزية، نحسب مصفوفة جاكوبي لهذه التحويل:

$$J(S)(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{pmatrix}$$

ومحددتها

$$\det(J(S)(r, \theta, z)) = \rho^2 \sin \phi$$

بالتالي فإنه لأي دالة f قابلة للتكامل على منطقة $D \subset \mathbb{R}^3$ يكون

$$\begin{aligned} \int \int \int_D f(x, y, z) d(x, y, z) \\ = \int \int \int_E f(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d(\rho, \theta, \phi). \end{aligned}$$

حيث $E = \{ (\rho, \theta, \phi) \mid (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) \in D \}$