

الباب الرابع

التكامل متعدد الأبعاد

يمكن وصف عملية التكامل لدالة حقيقية في متغير واحد بأنها عملية حساب للمساحة المحصورة بين المنحنى الممثل للدالة وبين محور X ، مع الأخذ في الاعتبار أن المساحات تحت المحور تحسب بإشارة سالبة. بالمثل يمكن وصف تكامل الدالة في متغيرين بأنه مقدار الحجم المحصور بين السطح الممثل للدالة وبين المستوى XY . وكانت الفكرة الأولى لحساب الحجم هي تقسيم الجسم إلى شرائح رقيقة ذات سمك Δx وحساب مساحة كل شريحة ثم إيجاد الحجم بجمع تلك المساحات مضروبة في Δx ، أو بشكل آخر بحساب التكامل للمساحة باعتبارها دالة في x ، يسمى هذا الأسلوب بإيجاد التكامل المتتالي لأننا نوجد أولاً المساحة وهي تكامل بالنسبة لأحد المتغيرين ثم نكامل تلك المساحة كدالة في المتغير الآخر. لكن سرعان ما سنكتشف أن تلك الطريقة لا تصلح لأي دالة ولا تصلح لو كان نطاق الدالة ذو هندسة معقدة بعض الشيء. تواجهنا إذن معضلة حساب الحجم باستخدام التكامل وتطرح علينا عدة أسئلة:

- (أ) هل يمكن حساب الحجم المحصور بين السطح الممثل لدالة في متغيرين وبين المستوى باستخدام التكامل؟
 - (ب) هل نستطيع حساب التكامل لدالة في متغيرين كتكامل متتالي؟
 - (ج) كيف نعمم هذه الأفكار لأكثر من متغيرين؟
 - (د) ما هي الطرق العملية لحساب التكاملات في أكثر من متغير؟ وهل توجد طرق مناظرة لطرق التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئ التي تعلمناها للدوال في متغير واحد؟
 - (هـ) ما العلاقة بين التكامل والاشتقاق لدالة في أكثر من متغير؟
- سنصل في الفصول التالية لبعض الإجابات عن هذه الأسئلة.

١.٤ التكاملات المتتالية والتكامل الثنائي على مستطيل

سنبدأ بدراسة التكامل المتتالي لدالة في متغيرين، الفكرة يمكن فهمها بتصور أن لدينا دالة موجبة f في متغيرين، لحساب الحجم المحصور بين السطح الممثل للدالة والمستوى XY فوق المستطيل $M = [a, b] \times [c, d]$ فإننا نبدأ بأخذ مقطع طولي بتثبيت قيمة $y_0 \in [c, d]$ ونحسب مساحة هذا المقطع بإيجاد التكامل

$$A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

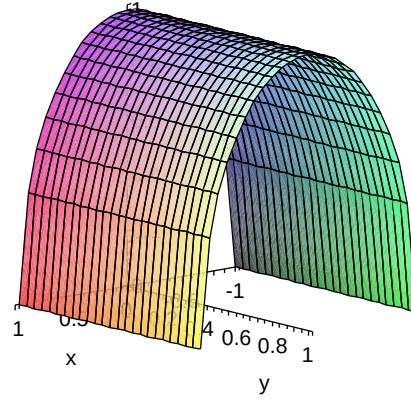
ثم نقوم بحساب التكامل

$$\int_c^d A(y) dy$$

فمن المتوقع أن يعطي هذا التكامل الحجم المطلوب. لتوضيح هذه الفكرة ندرس المثالين الآتيين:

١.٤-١ :

(١) لتكن $f(x, y) = \sqrt{1-x^2}, y \in [0, 1], x \in [-1, 1]$ ، السطح الممثل لهذه الدالة هو النصف العلوي لاسطوانة دائرية قائمة محورها هو محور Y كما بالشكل



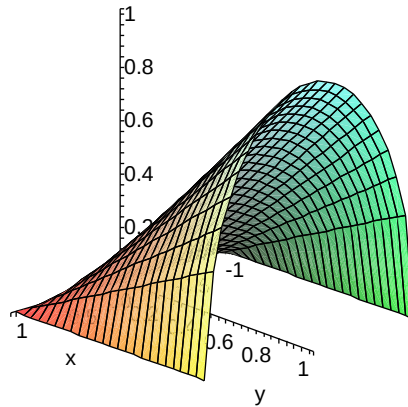
نثبت $y \in [0, 1]$ ونوجد مساحة المقطع $A(y)$

$$A(y) = \int_{-1}^1 f(x, y) dx = \pi/2$$

ثم نحسب الحجم بالتكامل بالنسبة لـ y

$$V = \int_0^1 A(y) dy = \pi.$$

(٢) لتكن $f(x, y) = y\sqrt{1-x^2}, y \in [0, 1], x \in [-1, 1]$ ، السطح الممثل لهذه الدالة يظهر بالشكل التالي



نثبت $y \in [0, 2]$ ونحسب مساحة المقطع $A(y)$

$$A(y) = \int_{-1}^1 f(x, y) dx = y\pi/2$$

ثم نوجد الحجم بالتكامل

$$V = \int_0^2 A(y) dy = \pi/4.$$

يظهر من هذين المثالين أن إجراء التكامل مرة بالنسبة لأحد المتغيرين ثم بالنسبة للمتغير الآخر يعطي الحجم المحصور بين السطح الممثل للدالة وبين المستوى XY . القيمة الناتجة عند إجراء التكامل بهذه الطريقة تسمى **تكامل متتالي**.

٢-١.٤- تعريف: التكاملات المتتالية لدالة في متغيرين: ليكن $M = [a, b] \times [c, d]$ مستطيل، ولتكن $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة. إذا كانت الدالة $f_1(x) = f(x, y_0)$ قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ لكل $y_0 \in [c, d]$ ، وكانت الدالة $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ قابلة للتكامل على الفترة $[c, d]$ فإن القيمة

$$\int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

تسمى **تكامل متتالي** للدالة f على المستطيل M .
بالمثل: إذا كانت الدالة $f_2(x) = f(x_0, y)$ قابلة للتكامل على الفترة $[c, d]$ لأي قيمة $x_0 \in [a, b]$ وكانت الدالة $B(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ قابلة للتكامل على $[a, b]$ فإن

$$\int_a^b B(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

يسمى أيضا **تكامل متتالي** للدالة f على المستطيل M .

نلاحظ أن لدينا تكاملان متتاليان للدالة على أي مستطيل، وهو ما يثير سؤالاً هاماً: هل يعطي هذان التكاملان نفس القيمة؟ من المتوقع أن تكون الإجابة بالإيجاب إذ أن كل من التكاملين لابد أن يعطي الحجم المحصور بين سطح الدالة وبين المستوى XY لكن للأسف ليس هذا صحيحاً على وجه العموم، إذ يمكن إيجاد دالة $f(x, y)$ معرفة ومحدودة على مستطيل $M = [a, b] \times [c, d]$ ويكون كلا من التكاملان المتتاليان

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx, \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

معرفة، لكن التكاملان لا يعطيان نفس القيمة. إليك مثال لهذه الظاهرة

٣-١.٤- مثال هام: ليكن $M = [0, 1] \times [0, 1]$ ولتكن

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{عندما } 0 < x < y < 1, \\ -\frac{1}{x^2} & \text{عندما } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

بالحساب المباشر نجد أن

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = 1, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = -1.$$

يبدو إذن أننا نحتاج لتعريف جديد للتكامل يختلف عن التكامل الممتالي.

١.٤-٤- تعريف التكامل الثنائي لدالة على مستطيل: ليكن $M = [a, b] \times [c, d]$ مستطيل، ولتكن $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة.

(أ) لتكن $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ تجزئة للفترة $[a, b]$ و $(y_0, y_1, \dots, y_m)$ تجزئة للفترة $[c, d]$ ، مجموعة المستطيلات $\{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ تسمى تجزئة للمستطيل M . ويسمى العدد $|P| = \max_{k,j} (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1})$ بمقياس تلك التجزئة.

(ب) إذا كانت $P = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ تجزئة للمستطيل M وكانت $(\xi_k, \eta_j) \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ لكل k, j فإن المجموع

$$\mathcal{R}(f, P) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_k, \eta_j) (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1})$$

يسمى تجميع ريمان للدالة f على M .

(ج) ليكن $M = [a, b] \times [c, d]$ مستطيل، ولتكن $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة. يقال أن الدالة f قابلة للتكامل على المستطيل M إذا وجد عدد حقيقي I بحيث لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ تحقق إن لأي تجزئة P

$$|P| < \delta \implies |\mathcal{R}(f, P) - I| < \varepsilon$$

في هذه الحالة يكون العدد I وحيداً، ويسمى قيمة التكامل الثنائي للدالة f على المستطيل M ويرمز له بالرمز

$$\iint_M f(x, y) dA$$

٥-١.٤ - ملاحظات:

- (١) من الواضح أن لجميع ريمان يمثل حجماً، فالمقدار $(y_j - y_{j-1})(x_k - x_{k-1})$ هو مساحة المستطيل الصغير $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ وهو مضروب في الارتفاع $f(\xi_k, \eta_j)$. يمكن النظر لهذا الحجم على أنه تكامل لدالة سلمية g .
- (٢) وحدانية العدد I المذكور في التعريف يمكن إثباتها بنفس طريقة إثبات وحدانية النهاية.
- كما في حالة الدوال في متغير واحد يمكن تعريف تجميعات داربو العلوية والسفلية لدالة في متغيرين

٦-١.٤ - تعريف: ليكن $M = [a, b] \times [c, d]$ مستطيل، وليكن $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة. وليكن $\mathbf{P} = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ تجزئة للمستطيل M ، وليكن $M_{k,j} = \sup_{(x,y) \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x, y)$ ، $m_{k,j} = \inf_{(x,y) \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x, y)$ المقدران

$$U(f, \mathbf{P}) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m M_{k,j} (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}),$$

$$L(f, \mathbf{P}) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m m_{k,j} (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1})$$

يسميان (على الترتيب) تجميع داربو العلوي وتجميع داربو السفلي للدالة f على M .

في التعريف السابق إذا وضعنا

$$g(x, y) = \begin{cases} m_{k,j} & \text{عندما } x_{k-1} \leq x < x_k, y_{j-1} \leq y < y_j \\ m_{n,m} & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

$$h(x, y) = \begin{cases} M_{k,j} & \text{عندما } x_{k-1} \leq x < x_k, y_{j-1} \leq y < y_j \\ M_{n,m} & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

فإننا نجد أن $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$ وأن g, h دالتان سلميتان (أي ثابتتان على كل مستطيل جزئي)، ومن السهل إثبات أن كلا منهما قابلة للتكامل على M وأن

$$U(f, \mathbf{P}) = \int \int_M h(x, y) dA, \quad L(f, \mathbf{P}) = \int \int_M g(x, y) dA$$

٧-١.٤ - ملاحظة هامة - اطراد تجميعات داربو: لتكن $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة، وليكن

$$\mathbf{P} = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$$

$$\mathbf{Q} = \{ [s_{k-1}, s_k] \times [t_{j-1}, t_j] \mid 1 \leq k \leq n_1, 1 \leq j \leq m_1 \}$$

نجزنتان بحيث $\mathbf{P}$ أدق من $\mathbf{Q}$ ، أي أن

$$\{s_0, \dots, s_{n_1}\} \subset \{x_0, \dots, x_n\}, \{t_0, \dots, t_{m_1}\} \subset \{y_0, \dots, y_m\}$$

فإن

$$L(f, \mathbf{Q}) \leq L(f, \mathbf{P}) \leq U(f, \mathbf{P}) \leq U(f, \mathbf{Q})$$

٨-١٤- نظرية: ليكن $M = [a, b] \times [c, d]$ مستطيل ، وليكن $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة.

(أ) الدالة f قابلة للتكامل على M إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث لأي تجزئة $\mathbf{P} = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ يكون

$$|\mathbf{P}| < \delta \implies |U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P})| < \varepsilon \quad (٤.١)$$

(ب) إذا كانت الدالة f متصلة على M فإنها تكون قابلة للتكامل على M .

(ج) إذا كانت الدالة f دالة ثابتة $f(x, y) = c$ فإن

$$\iint_M f(x, y) dA = c(b-a)(d-c)$$

برهان -

(أ) لنفرض أولاً أن الدالة f قابلة للتكامل على M ، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى . من تعريف القابلية للتكامل: يوجد $\delta > 0$ بحيث لأي تجزئة $\mathbf{P} = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ يكون

$$|\mathbf{P}| < \delta \implies \left| \mathcal{R}(f, \mathbf{P}) - \iint_M f(x, y) dA \right| < \varepsilon/4$$

ينتج من ذلك أنه لأي تجزئة $\mathbf{P} = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ نحقق $|\mathbf{P}| < \delta$ ولأي اختيار لنقاط $(\xi_k, \eta_j), (\xi'_k, \eta'_j) \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ فإن

$$|\mathcal{R}(f, \mathbf{P}) - \mathcal{R}'(f, \mathbf{P})| < \varepsilon/2$$

حيث $\mathcal{R}(f, \mathbf{P}), \mathcal{R}'(f, \mathbf{P})$ هما مجموعا ريمان المناظران للنقاط المختارة. لنأخذ إذن تجزئة $\mathbf{P} = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ من خواص $\sup, \inf$ نستطيع إيجاد نقاط $(\xi_k, \eta_j), (\xi'_k, \eta'_j) \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ بحيث

$$M_{k,j} - f(\xi_k, \eta_j) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)(d-c)}, \quad f(\xi'_k, \eta'_j) - m_{k,j} < \frac{\varepsilon}{4(b-a)(d-c)}$$

باستخدام ذلك نجد أن

$$\begin{aligned}
U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P}) &\leq |U(f, \mathbf{P}) - \mathcal{R}(f, \mathbf{P})| + |\mathcal{R}(f, \mathbf{P}) - \mathcal{R}'(f, \mathbf{P})| \\
&\quad + |L(f, \mathbf{P}) - \mathcal{R}'(f, \mathbf{P})| \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{k,j} - f(\xi_k, \eta_j))(x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}) \right| \\
&\quad + |\mathcal{R}(f, \mathbf{P}) - \mathcal{R}'(f, \mathbf{P})| \\
&\quad + \left| \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (m_{k,j} - f(\xi'_k, \eta'_j))(x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}) \right| \\
&< \frac{2\varepsilon}{4(b-a)(d-c)} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

يثبت هذا أن القابلية للتكامل نستلزم الشرط المذكور في النظرية لتجميعات داربو. ننقل الآن لإثبات العكس فنفرض أن لدينا دالة $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ نحقق أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\mathbf{P} = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ بحيث لأي تجزئة يكون

$$|\mathbf{P}| < \delta \implies |U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P})| < \varepsilon$$

من الملاحظة السابقة على النظرية نستنتج أن تجميعات داربو السفلية محدودة من أعلى ونجميعات داربو العلوية محدودة من أسفل، نأخذ

$$\underline{I} = \sup_{\mathbf{P}} L(f, \mathbf{P}), \quad \bar{I} = \inf_{\mathbf{P}} U(f, \mathbf{P})$$

من الواضح أنه لأي تجزئة $\mathbf{P}$ يكون

$$L(f, \mathbf{P}) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq U(f, \mathbf{P})$$

ومنه $0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P})$ وينتج من الفرض أن $\bar{I} = \underline{I}$. سنثبت أن $\underline{I} = \bar{I} = \iint_M f(x, y) dA$

من أجل ذلك نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى ونأخذ تجزئة $\mathbf{P} = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ بحيث $|\mathbf{P}| < \delta$ ونختار أي نقاط $(\xi_k, \eta_j) \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ لكل k, j ، بما أن

$$m_{k,j} \leq f(\xi_k, \eta_j) \leq M_{k,j}$$

فإن

$$L(f, \mathbf{P}) \leq \mathcal{R}(f, \mathbf{P}) \leq U(f, \mathbf{P})$$

لكن اختيارنا للتجزئة $\mathbf{P}$ نحقق $|U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P})| < \varepsilon$ وينتج من ذلك أن

$$|\mathcal{R}(f, \mathbf{P}) - \underline{I}| \leq U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P}) < \varepsilon$$

وهو ما يثبت أن الدالة قابلة للتكامل ونكاملها يساوي $\underline{I} = \bar{I}$.

(ب) لإثبات هذا الجزء، سنحتاج للحقيقة الآتية

إذا كانت $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث لأي نقطتين $(\xi, \eta), (\xi', \eta') \in M$ يكون

$$d((\xi, \eta), (\xi', \eta')) < \delta \implies |f(\xi, \eta) - f(\xi', \eta')| < \varepsilon$$

نسمى هذه الخاصية بخاصية الإنصال المنتظم وهي على وجه العموم أقوى من الإنصال. لنأخذ $\varepsilon > 0$ ونختار δ_0 حسب الخاصية السابقة. ونضع $\delta = \delta_0^2/2$. فلأي تجزئة نقاط $(\xi, \eta), (\xi', \eta')$ يكون

$$\begin{aligned} (\xi, \eta), (\xi', \eta') \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] &\implies d((\xi, \eta), (\xi', \eta')) < \delta_0 \\ &\implies |f(\xi, \eta) - f(\xi', \eta')| < \varepsilon \end{aligned}$$

وهو ما يؤدي إلى أن $M_{k,j} - m_{k,j} \leq \varepsilon$ فنستنتج أن

$$U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P}) < \varepsilon(b-a)(d-c)$$

يكفي هذا لإثبات أن f قابلة للتكامل نتيجة للفقرة (أ) التي برهناها عاليه.

(ج) واضحة ولا نحتاج لبرهان.

٩-١.٤ - أمثلة:

(١) الدالة $f(x, y) = x^2 y$ قابلة للتكامل على أي مستطيل لأنها دالة متصلة.

(٢) الدالة المعرفة بالعلاقة $f(x, y) = 1, x < 1, f(x, y) = 2, x \geq 1$ ليست متصلة عند النقاط $\{(x, y) | x = 1\}$. لكنها رغم ذلك قابلة للتكامل على المستطيل $[0, 2] \times [0, 2]$ لأنها دالة سلمية (ثابتة على كل من المستطيلين $[0, 1] \times [0, 2]$ و $[1, 2] \times [0, 2]$).

أبسط خواص تكامل ريمان الثنائي هي خاصية الجمع التالية:

١٠-١.٤ - نظرية (خاصية الجمع للتكامل): ليكن M مستطيل ولتكن $M_1, \dots, M_n$ مجموعة من المستطيلات التي لا يتقاطع أي مستطيلين منها في نقاط داخلية بحيث $M = \bigcup_{k=1}^n M_k$. أي دالتنا $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ تكون قابلة للتكامل على M إذا وفقط كانت f قابلة للتكامل على كل من $M_1, \dots, M_n$ ، وفي هذه الحالة يكون

$$\int \int_M f(x, y) dA = \sum_{k=1}^n \int \int_{M_k} f(x, y) dA$$

برهان - سنبرهن صحة النظرية في حالة $n = 2$. ويمكن تعميم النتيجة بسهولة. لتكن $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للتكامل على M ، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى و $\delta > 0$ مختارة بحيث نحقق الشرط (١.٤).

نأخذ أي نجزنتين $\mathbf{P}_1 = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ للمستطيل M_1 و M_2 بحيث $\mathbf{P} = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ للمستطيل M نحقق $|\mathbf{P}_1| < \delta$ و $|\mathbf{P}_2| < \delta$ ونضع $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2$ فتكون $\mathbf{P}$ نجزة للمستطيل M وبالتالي $|\mathbf{P}| < \delta$.

$$U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P}) < \varepsilon$$

من الواضح أن

$$(٤.٢) \quad U(f, \mathbf{P}) = U(f, \mathbf{P}_1) + U(f, \mathbf{P}_2), L(f, \mathbf{P}) = L(f, \mathbf{P}_1) + L(f, \mathbf{P}_2)$$

وبالتالي $U(f, \mathbf{P}_1) - L(f, \mathbf{P}_1) = U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P}) - (U(f, \mathbf{P}_2) - L(f, \mathbf{P}_2))$ وحيث أن $U(f, \mathbf{P}_2) - L(f, \mathbf{P}_2) > 0$ فإن

$$U(f, \mathbf{P}_1) - L(f, \mathbf{P}_1) < \varepsilon$$

يثبت هذا أن f قابلة للتكامل على M_1 وبالمثل تكون f قابلة للتكامل على M_2 . أيضا باستخدام (٢.٤) وبأخذ $\sup$ ينتج أن

$$\int \int_M f(x, y) dA = \int \int_{M_1} f(x, y) dA + \int \int_{M_2} f(x, y) dA$$

نتقل الآن لإثبات الإنجاء العكسي فنفرض أن f قابلة للتكامل على كل من M_1 و M_2 ، ولأي $\varepsilon > 0$ معطى يوجد $\delta_1 > 0$ نحقق (١.٤) بالنسبة للمستطيل M_1 وكذلك يوجد $\delta_2 > 0$ نحقق (١.٤) للمستطيل M_2 . نأخذ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. ولتكن $\mathbf{P}$ نجزة للمستطيل M نحقق $|\mathbf{P}| < \delta$. نضع

$$\mathbf{P}_1 = (\mathbf{P} \cap M_1) \cup \{P_1, Q_1\}, \quad \mathbf{P}_2 = (\mathbf{P} \cap M_2) \cup \{P_1, Q_1\}$$

حيث P_1, Q_1 هما نقطتي الأركان الداخلية للمستطيلان M_1, M_2 . من السهل ملاحظة أن $|\mathbf{P}_1| < \delta, |\mathbf{P}_2| < \delta$ كما أن

$$\begin{aligned} U(f, \mathbf{P}) &\leq U(f, \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2) \leq U(f, \mathbf{P}_1) + U(f, \mathbf{P}_2), \\ L(f, \mathbf{P}) &\geq L(f, \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2) \geq L(f, \mathbf{P}_1) + L(f, \mathbf{P}_2) \end{aligned}$$

بالطرح ينتج

$$U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P}) \leq U(f, \mathbf{P}_1) - L(f, \mathbf{P}_1) + U(f, \mathbf{P}_2) - L(f, \mathbf{P}_2) < 2\varepsilon$$

وهو ما يثبت أن f نحقق الشرط (١.٤) على M .

١١-١.٤- نظرية (جبر الدوال القابلة للتكامل): لتكن $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ دالتان قابلتان للتكامل على المستطيل M ، وليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(أ) $\alpha f + \beta g$ قابلة للتكامل على M وتحقق

$$\int \int_M (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dA = \alpha \int \int_M f(x, y) dA + \beta \int \int_M g(x, y) dA$$

(ب) إذا كانت $f(x, y) \leq g(x, y)$ لكل $(x, y) \in M$ فإن

$$\int \int_M f(x, y) dA \leq \int \int_M g(x, y) dA$$

برهان - متروك للقارى

النظرية التالية تماثل نظرية القيمة المتوسطة لتكامل دالة في متغير واحد

١٢-١.٤- نظرية القيمة المتوسطة للتكامل الثنائي: ليكن $M = [a, b] \times [c, d]$ مستطيل ، ولتكن $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. إذا كانت f متصلة M فإنَّ توجد نقطة $P \in M$ بحيث

$$\int \int_M f(x, y) dA = f(P)(b-a)(d-c)$$

برهان - لتكن $M = \max_{(x,y) \in M} f(x, y)$ و $m = \min_{(x,y) \in M} f(x, y)$ من جبر الدوال القابلة للتكامل نستنتج أن

$$m(b-a)(d-c) \leq \int \int_M f(x, y) dA \leq M(b-a)(d-c)$$

بالتالي $\frac{1}{(b-a)(d-c)} \int \int_M f(x, y) dA$ موجودة في مدى الدالة f (من نظرية القيمة الوسيطة للدوال المتصلة) أي أنه توجد $P \in M$ بحيث

$$f(P) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int \int_M f(x, y) dA$$

ننتقل الآن للعلاقة بين تكامل ريمان لدالة في متغيرين وبين التكاملات المتتالية للدالة

١٣-١.٤- نظرية: ليكن $M = [a, b] \times [c, d]$ مستطيل ، ولتكن $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. إذا كانت f متصلة على M فإن التكاملان المتتاليان للدالة f موجودان ويكون

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int \int_M f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

برهان - ليكن $\varepsilon > 0$ معطى من اتصال الدالة f يمكن أن نختار $\delta > 0$ بحيث

$$d_e((x, y), (x', y')) < \delta \implies |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon / [(b-a)(d-c)]$$

نأخذ $X = (x_0, \dots, x_n)$ نجزئة للفترة $[a, b]$ و $Y = (y_0, \dots, y_m)$ نجزئة للفترة $[c, d]$ بحيث $\max_i |y_{i+1} - y_i| < \delta$ و $\max_j |x_{j+1} - x_j| < \delta$

نثبت أولا أن $\int_a^b f(x, y) dx$ موجود لأي $y \in [c, d]$: لتكن $y_0 \in [c, d]$ ثابتة ، لأي اختيار لنقاط $\xi_j, \xi'_j \in [x_j, x_{j+1}]$ يكون $|f(\xi_j, y_0) - f(\xi'_j, y_0)| < \varepsilon / [(b-a)(d-c)]$ ، وبالتالي يكون $M_j(y_0) - m_j(y_0) \leq \varepsilon / [(b-a)(d-c)]$ حيث

$$M_j(y_0) = \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x, y_0), \quad m_j(y_0) = \min_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x, y_0)$$

من هذا ينتج أن الفارق بين نجميعات داربو العلوية والسفلية للدالة $\phi_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ على التجزئة X يحقق

$$\begin{aligned} U(\phi_{y_0}, X) - L(\phi_{y_0}, X) &= \sum_j (M_j(y_0) - m_j(y_0))(x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \varepsilon / [(a - b)(d - c)] \sum_j (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon / (d - c) \end{aligned}$$

وهو ما يثبت أن الدالة ϕ_{y_0} قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على الفترة $[a, b]$. نضع $I_1(y_0) = \int_a^b \phi_{y_0}(x) dx$.
ثم نثبت أن التكامل المتتالي موجود : بأخذ أي نقاط $\eta_i, \eta'_i \in [y_j, y_{j+1}]$ نجد أن

$$\begin{aligned} |I_1(\eta_i) - I_1(\eta'_i)| &\leq \int_a^b |\phi_{\eta_i}(x) - \phi_{\eta'_i}(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(\eta_i, x) - f(\eta'_i, x)| dx < \varepsilon / (d - c) \end{aligned}$$

وبالتالي يكون $M_i - m_i \leq \varepsilon / (d - c)$ حيث

$$M_i = \max_{y \in [y_i, y_{i+1}]} I_1(y), \quad m_i = \min_{y \in [y_i, y_{i+1}]} I_1(y)$$

وبالتالي تكون I_1 قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على $[c, d]$. كذلك ينتج أن

$$\left| \int_c^d I_1(y) dy - \sum_i \sum_j f(\xi_i, \eta_j)(x_{j+1} - x_j)(\eta_{i+1} - \eta_i) \right| < \varepsilon$$

وهو ما يثبت أن

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d I_1(y) dy = \int \int_M f(x, y) dA$$

إثبات باقي النظرية يتم بنفس الطريقة.

١٤.٤ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

(١) إذا كانت $f(x, y)$ دالة معرفة على مستطيل $M = [a, b] \times [c, d]$ فإن

() $\int_a^b f(x, y) dx$ موجود $\forall y \in [c, d]$

() $\int_a^b f(x, y) dx$ غير موجود.

() التكاملين $\int_a^b f(x, y) dx$ و $\int_c^d f(x, y) dy$ موجودان

() التكامل المتتالي $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ موجود.

(٢) لأي دالة f معرفة على مستطيل $M = [a, b] \times [c, d]$ يكون

() وجود التكامل المتتالي $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ يستلزم أن f قابلة للتكامل على M .

() وجود كل من التكاملين المتتاليين $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ و $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$ يستلزم أن f قابلة للتكامل على M .

() عدم وجود أحد التكاملين المتتاليين يستلزم أن الدالة غير قابلة للتكامل على M .

() وجود كل من التكاملين المتتاليين $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ و $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$ وتساويهما يستلزم أن f قابلة للتكامل على M .

- (٣) إذا كانت $f(x, y)$ دالة معرفة على مستطيل $M = [a, b] \times [c, d]$ فإن
- () إتصال f يستلزم قابليتها للتكامل
 - () عدم إتصال f يستلزم عدم قابليتها للتكامل
 - () وجود التكاملان المتتاليان للدالة f يستلزم اتصالها
 - () وجود التكاملان المتتاليان للدالة f ينتج عن إتصالها.

١٥.٤ تمارين

(١) إدرس قابلية كل من الدوال التالية للتكامل على المستطيل M المعطى

- (أ) $M = [a, b] \times [c, d], f(x, y) = \alpha x + \beta y$
- (ب) $M = [-1, 1] \times [-1, 1], f(0, 0) = 0, (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
- (ج) $M = [-1, 0] \times [-1, 0], f(x, x) = 0, x \neq \pm y, f(x, y) = \frac{(x-1)^2}{x^2 - y^2}$
- (د) $M = [0, 1] \times [0, 2], f(x, y) = \begin{cases} 2x, & \text{عندما } 2x > y \\ 2x - y, & \text{عندما } 2x \leq y \end{cases}$
- (هـ) $M = [0, 1] \times [0, 1], f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{عندما } y \in \mathbb{Q} \\ x - y, & \text{عندما } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(٢) أوجد التكاملات الآتية

- (أ) $\int_0^1 \int_{-1}^1 x^2 + y^2 dy dx$
- (ب) $\int_1^3 \int_{-1}^1 xy \sin(xy) dy dx$
- (ج) $\int_2^4 \int_{-1}^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy dx$
- (د) $\int_0^2 \int_0^1 \frac{x^2}{(1+y^2)} dy dx$
- (هـ) $\int_1^2 \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dy dx$
- (و) $\int_1^2 \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + y^2)} dy dx$
- (ز) $\int_1^2 \int_0^1 \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} dy dx$
- (ح) $\int_1^2 \int_0^1 \frac{y}{(x^2 + y^2)} dy dx$

(٣) لتكن f دالة متصلة على $M = [a, b] \times [c, d]$ ولتكن

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(x, y) dy dx$$

برهن أن

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

(٤) لتكن f دالة لها مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الثانية على $M =]a - \delta, b + \delta[\times]c - \delta, d + \delta[$ حيث $\delta > 0$. برهن أنه لأي $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$ يكون

$$\int_a^{x_0} \int_c^{y_0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dy dx = f(x_0, y_0) - f(x_0, a) - f(x_0, c) + f(a, c)$$

٢.٤ المساحة والتكامل على مناطق مختلفة

ننتقل الآن لدراسة تكامل دالة في متغيرين على منطقة ذات شكل هندسي مختلف عن المستطيلات القانونية، سنفرض أن لدينا مجموعة جزئية محدودة $D \subset \mathbb{R}^2$ ، وأن $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ، وليكن M مستطيل قانوني يحتوي D نضع

$$f_M(P) = \begin{cases} f(P), & \text{عندما } P \in D \\ 0, & \text{عندما } P \notin D \end{cases}$$

٢.٤-١٦-تعريف: التكامل الثنائي لدالة في متغيرين على مجموعة محدودة $D \subset \mathbb{R}^2$:
نقول أن f قابلة للتكامل على D إذا كانت f_M قابلة للتكامل على M . وفي هذه الحالة نضع

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_M f_M(x, y) dA$$

٢.٤-١٧-ملاحظات:

(١) ليكن M_1, M_2 مستطيلان يحوي كل منهما D ، ولتكن f_{M_1} و f_{M_2} الدالتان المناظران، نلاحظ أن

$$f_{M_1}(P) = f_{M_2}(P) \quad \forall P \in D$$

بينما كل منهما $= 0$ لأي نقطة خارج D وبالتالي يكون

$$\iint_{M_1} f_{M_1}(x, y) dA = \iint_{M_2} f_{M_2}(x, y) dA$$

أي أن التكامل $\iint_D f(x, y) dA$ لا يتوقف على اختيارنا للمستطيل M .

(٢) إذا كانت D عبارة عن مستطيل قانوني فإن التكامل المعرف بالتعريف السابق ينطبق على التكامل الثنائي على المستطيل.

٢.٤-١٨-تعريف: مساحة منطقة محدودة $D \subset \mathbb{R}^2$: نقول أن D منطقة ذات مساحة إذا كانت الدالة الثابتة $f(P) = 1$ قابلة للتكامل على D . وفي هذه الحالة نضع

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1 dA$$

ليس من الصعب أن نرى أن هناك مناطق ليس لها مساحة (أي أننا لا نستطيع إيجاد مساحتها باستخدام التكامل).

٢.٤-١٩-مثال: نأخذ $D = (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times [0, 1]$ ولتكن $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $f(P) = 1$ لكل $P \in D$. فنجد أنه لأي تجزئة $\mathbf{P} = \{ [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ للمستطيل $M = [0, 1] \times [0, 1]$ سيكون في أي مستطيل صغير $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ هناك نقاط

ننتمي للمجموعة D ونقاط لا تنتمي لهذه المجموعة ، بأخذ نقاط $(\xi_k, \eta_j) \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ ننتمي للمجموعة D سيكون $f_M(\xi_k, \eta_j) = 1$ وبالتالي يكون لجميع ريمان المناظر يساوي 1. وبأخذ نقاط $(\xi_k, \eta_j) \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ لا ننتمي للمجموعة D ستكون $f_M(\xi_k, \eta_j) = 0$ وبالتالي نجد أن لجميع ريمان المناظر يساوي 0. يبين هذا أن الدالة $f_M(P)$ ليست قابلة للتكامل على M وبالتالي فإن f ليست قابلة للتكامل على D .

من أمثلة المناطق ذات المساحة تلك المناطق التي مساحتها صفر، أي دالة محدودة معرفة على منطقة من هذا النوع ستكون قابلة للتكامل، وذلك كما سنبرهن فيما يلي:

٢٠-٢٤- نظرية:

(أ) المنحنى الممثل لدالة متصلة على فترة مغلقة يكون منطقة ذات مساحة تساوي الصفر.

(ب) إذا كانت D منطقة ذات مساحة تساوي الصفر و f دالة محدودة معرفة على D فإن f قابلة للتكامل على D وتكاملها يساوي الصفر.

برهان -

(أ) لتكن $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، نضع

$$D = \{ (x, \phi(x)) \mid x \in [a, b] \}$$

نأخذ $M = [a, b] \times [c, d]$ مستطيل يحوي D ونضع $f(P) = \begin{cases} 1, & P \in D \\ 0, & P \in M \setminus D \end{cases}$ ليكن ε معطى. من خاصية الاتصال المنتظم يمكن إيجاد نجزة $(x_0, \dots, x_n)$ للفترة $[a, b]$ بحيث

$$\alpha_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \phi(x), \beta_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \phi(x) \text{ حيث } \alpha_k - \beta_k < \varepsilon / (b - a) \quad \forall k$$

نُعرّف التجزئة $\mathbf{P}$ للمستطيل بالمستطيلات $R_{k,0} = [x_{k-1}, x_k] \times [c, \beta_k]$ و $R_{k,1} = [x_{k-1}, x_k] \times [m_k, \alpha_k]$ و $R_{k,2} = [x_{k-1}, x_k] \times [\alpha_k, d]$ ، نلاحظ أن $D \subset \bigcup_{k=1}^n R_{k,1}$ سندرس جميع داريو للدالة f بالنسبة للتجزئة $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned} U(f, \mathbf{P}) &= \sum_{k=1}^n M_{k,0}(\beta_k - c)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n M_{k,1}(\alpha_k - \beta_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n M_{k,2}(d - \alpha_k)(x_k - x_{k-1}) \\ L(f, \mathbf{P}) &= \sum_{k=1}^n m_{k,0}(\beta_k - c)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n m_{k,1}(\alpha_k - \beta_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n m_{k,2}(d - \alpha_k)(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

لكن $M_{k,0} = m_{k,0} = M_{k,2} = m_{k,2} = 0$ لأن f تساوي 0 على كل مستطيل من $R_{k,0}, R_{k,2}$ ، بينما $M_{k,1} = 1, m_{k,1} = 0$ ، بالتالي :

$$\begin{aligned} U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P}) &= \sum_{k=1}^n (M_{k,1} - m_{k,1})(\alpha_k - \beta_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon \end{aligned}$$

وهو ما يثبت أن f قابلة للتكامل على M . كما نلاحظ مما سبق أن

$$\text{Area}(D) = \int \int_M f(x, y) dA < \varepsilon$$

وحيث أن هذا صحيح لأي $\varepsilon > 0$ فإن $\text{Area}(D) = 0$.

(ب) من السهل إثبات أنه إذا كانت D منطقة ذات مساحة وكانت $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ نحقق $m \leq f(P) \leq M$ فإنه لأي مستطيل M يحوي D ولأي نجزة $\mathbf{P}$ لهذا المستطيل يكون

$$U(f, \mathbf{P}) \leq M \text{Area}(D), \quad L(f, \mathbf{P}) \geq m \text{Area}(D)$$

فإذا كانت مساحة D تساوي الصفر فإن f تكون قابلة للتكامل ونكاملها يساوي الصفر.

أهم أنواع المناطق ذات المساحة هي المناطق المحصورة بين منحنيات بسيطة سلسلة ونعرفها كالتالي:

٢١-٢٤- تعريف: المناطق منتظمة الحدود: نقول أن مجموعة $D \subset \mathbb{R}^2$ هي منطقة منتظمة الحدود إذا وجدت دالتان قابلتان للاشتقاق ϕ_1, ϕ_2 في متغير واحد بحيث

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \}$$

أو وجدت دالتان قابلتان للاشتقاق ψ_1, ψ_2 في متغير واحد بحيث

$$D = \{ (x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

تتميز المناطق منتظمة الحدود بإمكان حساب التكاملات عليها كتكاملات متتالية كما توضح النظرية التالية

٢٤-٢٢- نظرية: لتكن

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \}$$

منطقة منتظمة الحدود، ولتكن $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للتكامل. فإن الدالة

$$I(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$$

قابلة للتكامل على $[a, b]$ ويكون

$$\int_a^b I(x) dx = \iint_D f(x, y) dA$$

وبالمثل لو كانت D مغطاة بـ

$$D = \{ (x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

برهان - متروك للقارئ

من جهة أخرى فإن الدوال المتصلة تكون قابلة للتكامل على أي منطقة منتظمة الحدود، وهو ما تنص عليه النظرية التالية

٢٤-٢٢- نظرية: أي دالة متصلة على منطقة منتظمة الحدود تكون قابلة للتكامل على تلك المنطقة.

برهان - متروك للقارئ

٢٤.٤ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

- (١) إذا كانت $f(x, y)$ دالة معرفة ومحدودة على منطقة ذات مساحة $D \subset \mathbb{R}^2$ فإن
- () f قابلة للتكامل على D .
 - () f غير قابلة للتكامل على D .
 - () $\iint_D f(x, y) dA = (\max f) \text{Area}(D)$.
 - () $\iint_D f(x, y) dA = 0$.

- (٢) لتكن $D \subset \mathbb{R}^2$ و ليكن M مستطيل يحويها و f دالة معرفة على M ، فإن
- () f قابلة للتكامل على M إذا وفقط إذا كانت f قابلة للتكامل على D .
 - () قابلية f للتكامل على M تستلزم قابلية f للتكامل على D .
 - () قابلية f للتكامل على D تستلزم قابلية f للتكامل على M .
 - () $\iint_M f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dA$.

- (٣) إذا كانت $f(x, y)$ دالة متصلة على مجموعة $D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \}$ حيث ϕ_1, ϕ_2 دالتان متصلتان، فإن
- () f قابلة للتكامل على D .
 - () $\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$.
 - () $\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$.
 - () $\iint_D f(x, y) dA = \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$.

٢٥.٤ تمارين

(١) إدرس ما إذا كانت المجموعة D المعطاة مجموعة ذات مساحة، ثم أوجد مساحتها إن وجدت.

$$D = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\} \quad (ا)$$

$$D \subset \mathbb{R}^2 \text{ أي مجموعة منتهية.} \quad (ب)$$

$$D = \{(x, y) | x, y \in [0, 1] \& \exists n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n, y = k/2^n\} \quad (ج)$$

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\} \quad (د)$$

$$D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\} \quad (هـ)$$

$$D = \{(x, y) | |x| + |y| \geq |x + y|\} \quad (و)$$

(٢) إدرس قابلية كل من الدوال التالية للتكامل على المجموعة D المعطاة

$$D = \{(x, y) | x, y \in [0, 1] \& \exists n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n, y = k/2^n\}, f(x, y) = \alpha x + \beta y \quad (ا)$$

$$D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}, f(0, 0) = 0, (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (ب)$$

$$D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}, f(x, x) = 0, x \neq \pm y, f(x, y) = \frac{(x-1)^2}{x^2 - y^2} \quad (ج)$$

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 3x\}, f(x, y) = \begin{cases} 2x, & \text{عندما } 2x > y \\ 2x - y, & \text{عندما } 2x \leq y \end{cases} \quad (د)$$

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}, f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{عندما } y \in \mathbb{Q} \\ 2x, & \text{عندما } y \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (هـ)$$

$$, f(x, y) = xy \quad (و)$$

$$D = \cup_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)}, 0 \leq y \leq 2n(n+1)\left(x - \frac{1}{n+1}\right) \right\} \right. \\ \left. \cup \left\{ (x, y) \mid \frac{2n+1}{2n(n+1)} \leq x \leq \frac{1}{n}, 0 \leq y \leq 2n(n+1)\left(\frac{1}{n} - x\right) \right\} \right)$$

(٣) أوجد التكاملات الآتية

$$\int_0^1 \int_1^x x^2 + y^2 dy dx \quad (ا)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{3 \cos \theta} r^2 \sin^2 \theta dr d\theta \quad (هـ)$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x x \sin(xy) dy dx \quad (ب)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx \quad (و)$$

$$\int_1^2 \int_x^{2x} \frac{1}{x^2 + y^2} dy dx \quad (ج)$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sin(y^3) dy dx \quad (ز)$$

$$\int_{-2}^2 \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx dy \quad (د)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 \frac{x^3}{x^4 + y^2} dy dx \quad (ح)$$

(٤) برهن قاعدة ليبنتز :

إذا كانت f دالة لها مشتقة جزئية متصلة بالنسبة للمتغير x على مستطيل $M = [a, b] \times [c, d]$

وكانت $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ دالتان لهما مشتقات متصلة على $]a, b[$ فإن الدالة $F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$ قابلة للاشتقاق على $]a, b[$ وتحقق

$$F'(x) = f(x, \phi_2(x))\phi_2'(x) - f(x, \phi_1(x))\phi_1'(x) + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$