

الباب الأول

الفراغات $\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$

تظهر الدوال في أكثر من متغير بشكل طبيعي في حياتنا، فالعديد من مسائل العلوم الطبيعية والاقتصاد والدراسات الاجتماعية يمكن بناء نماذج رياضية لها باستخدام الدوال في أكثر من متغير.
١-١ - أمثلة:

(١) النموذج المعتاد لدراسة الغازات المثالية يمثل ضغط الغاز كدالة في درجة الحرارة والحجم. ونكتبها على الصورة $P(T, V)$.

(٢) في علم الاقتصاد ندرس سعر سهم أو سند في بورصة الأوراق المالية كدالة في الزمن t وفي الطلب على الشراء b والمعرض للبيع s . فنكتبها كدالة $V(t, b, s)$.

(٣) في العلوم الحيوية ندرس نمو بعض أنواع الكائنات الدقيقة كدالة في كمية الغذاء المتوفرة والمساحة التي نشغلها والزمن. ونمثل ذلك على الصورة $N(F, S, t)$.

ولفهم الدوال في أكثر من متغير سنبدأ بدراسة الفراغات $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$ إلخ ، التي 'تعيش' فيها المتغيرات.

١.١ المجموعات $\mathbb{R}^N$ وتمثيلها الهندسي

كيف نتعامل مع دالة في متغيرين؟ لابد أولاً أن نلاحظ أن من المعتاد أن يكون لكل من المتغيرين معنى خاص، فيجب ألا نخلط بين المتغيرين ، مثلاً عند تمثيل ضغط الغاز كدالة $P(T, V)$ فإن $P(275, 10)$ تعطي ضغط غاز حجمه 10 وحدة حجم عند درجة حرارة 275 ، وليس العكس ، أي أن الترتيب الذي نكتب به المتغيرين له أهمية كبيرة. لذلك نمثل المتغيرين كعناصر في مجموعة مكونة من الأزواج المرتبة .
الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية هي عناصر المجموعة

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

على هذه المجموعة من العناصر نُعرِّف عمليتين أساسيتين:

١-٢ - العمليات الجبرية على $\mathbb{R}^2$: لأي $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ولأي $t \in \mathbb{R}$ نُعرِّف

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{عملية الجمع:}$$

$$t \cdot (x_1, y_1) = (tx_1, ty_1) \quad \text{عملية الضرب في عدد:}$$

حيث العمليات على الطرف الأيمن هي العمليات الجبرية المعتادة في $\mathbb{R}$.

بالمثل يمكننا التعامل مع ثلاثة متغيرات، فنضع

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$$

ونُعرّف العمليات الجبرية مثلما فعلنا في حالة المتغيرين. بشكل عام نُعرّف

١-٣- الفراغ الإقليدي ذو N - بعد $\mathbb{R}^N$: هو المجموعة

$$\mathbb{R}^N = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{N\text{-مرّة}} = \{ (x_1, \cdots, x_N) \mid x_1, \cdots, x_N \in \mathbb{R} \}$$

مع العمليات الجبرية المكرّرة لأي $(x_1, \cdots, x_N), (y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ ولأي $t \in \mathbb{R}$ بالصورة

عملية الجمع: $(x_1, \cdots, x_N) + (y_1, \cdots, y_N) = (x_1 + y_1, \cdots, x_N + y_N)$ ،

عملية الضرب في عدد: $t \cdot (x_1, \cdots, x_N) = (tx_1, \cdots, tx_N)$ ،

حيث العمليات على الطرف الأيمن هي العمليات الجبرية المعتادة في $\mathbb{R}$.

١-٤-:

(١) مجموع العنصرين $(3, 5)$ و $(-1, 1)$ من $\mathbb{R}^2$ هو

$$(3, 5) + (-1, 1) = (3 + (-1), 5 + 1) = (2, 6)$$

(٢) يمكن حساب العنصر $2P + 3Q$ حيث $P(4, 3, -2)$ و $Q(5, -1, 1)$ كما يلي

$$\begin{aligned} 2P + 3Q &= 2 \cdot (4, 3, -2) + 3 \cdot (5, -1, 1) \\ &= (2 \times 4 + 3 \times 5, 2 \times 3 + 3 \times (-1), 2 \times (-2) + 3 \times 1) \\ &= (23, 3, -1) \end{aligned}$$

(٣) لم نقم بتعريف عملية الضرب على $\mathbb{R}^N$. فتعبيران من نوع PQ^2 ، P/Q ، P^7 ليس لها معنى عندما $P, Q \in \mathbb{R}^N$.

التمثيل الهندسي

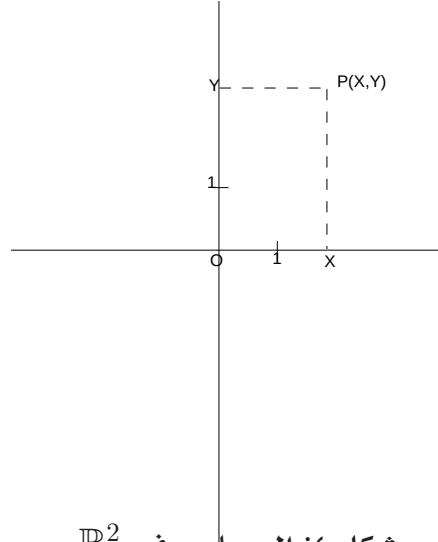
من المعتاد أن نمثل الأعداد الحقيقية على صورة نقط خط مستقيم، كذلك نمثل عناصر $\mathbb{R}^2$ على صورة نقاط المستوى ، ويتم ذلك باختيار نظام إحداثيات كارتيزية مكون من:

(١) نقطة ثابتة O تسمى نقطة الأصل ،

(ب) خطان مستقيمان متقاطعان في O نسميهما محوري الإحداثيات ، وعادة ما نأخذهما متعامدان ،

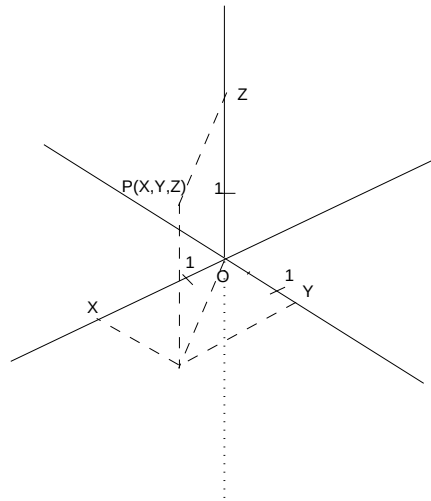
(ج) وحدة قياس على كل من المحورين .

ولكي نمثل العنصر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ نأخذ خطاً مستقيماً يوازي المحور الثاني ويبعد عنه x وحدة موجبة (أي x وحدة إلى اليمين إذا كانت x موجبة و $-x$ وحدة إلى اليسار إذا كانت x سالبة)، ثم نأخذ بالمثل خطاً مستقيماً يوازي المحور الأول ويبعد عنه y وحدة موجبة، نقطة تقاطع هذين الخطين هي النقطة التي تمثل العنصر (x, y) . كل عنصر في $\mathbb{R}^2$ يمثل بنقطة في المستوى، وكل نقطة في المستوى تمثل عنصراً في $\mathbb{R}^2$ ، العددان (x, y) يسميان إحداثيات النقطة الممثلة لهما. ولإظهار ذلك نكتب $P(x, y)$ للدلالة على أن النقطة P لها الإحداثيات (x, y) .



شكل ٤: المحاور في $\mathbb{R}^2$

من المعتاد تمثيل عناصر $\mathbb{R}^3$ بنقاط الفراغ ثلاثي الأبعاد، وذلك بأخذ نقطة أصل وثلاثة محاور متلاقية في تلك النقطة ووحدة قياس على كل محور. في هذا التمثيل نجد لأي نقطة في الفراغ عنصراً $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ يناظر تلك النقطة. نلاحظ أن المستوى الذي يضم محوري الإحداثيات الأولين يحوي جميع النقاط التي تمثل بثلاثيات مرتبة على الصورة $(x, y, 0)$ ، ويمكن وضع تلك النقاط في تناظر مع عناصر $\mathbb{R}^2$ ، ونسمي ذلك المستوى بالمستوى XY كما نسمي النقطة الممثلة بالثلاثي $(x, y, 0)$ مسقط النقطة الممثلة ب (x, y, z) على المستوى XY .



شكل ٥: المحاور في $\mathbb{R}^3$

يُتيح التمثيل الهندسي لعناصر $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ وصف الأشكال الهندسية بمعادلات جبرية بين الإحداثيات ، وهي الطريقة التي ابتكرها الفيلسوف وعالم الرياضيات الفرنسي رينيه ديكارت (Renée Descartes ١٥٩٦ - ١٦٥٠) وسميت بالهندسة التحليلية (أنليتل متري). فنحن نعلم مثلاً أن أي خط مستقيم في $\mathbb{R}^2$ يوصف بمعادلة على الصورة

$$\mathcal{L} : \quad ax + by + c = 0$$

ومعنى ذلك أن النقاط التي تحقق إحداثياتها هذه المعادلة هي تلك التي تقع على الخط المستقيم.

المسافة الإقليدية

المسافة بين نقطتين هي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين، وبالتالي تكون المسافة بين نقطتين $P(x_1, y_1)$ ، $Q(x_2, y_2)$ في المستوى $\mathbb{R}^2$ هي

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

بالمثل: المسافة بين نقطتين $P(x_1, y_1, z_1)$ ، $Q(x_2, y_2, z_2)$ في الفراغ الثلاثي $\mathbb{R}^3$ تعطى بالعلاقة

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وعموماً

٥-١- تعريف: لتكن $P(x_1, \dots, x_n)$ ، $Q(y_1, \dots, y_n)$ نقطتان في $\mathbb{R}^N$ ، نُعرِّف المسافة الإقليدية بين النقطتين بأنها

$$d_e(P, Q) = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}$$

من السهل إستنتاج بعض الخواص للمسافة الإقليدية، وسنعطي هنا أربعة خواص أساسية

٦-١- خواص المسافة الإقليدية: لتكن $P(x_1, \dots, x_n)$ ، $Q(y_1, \dots, y_n)$ ، $R(z_1, \dots, z_n)$ عناصر في $\mathbb{R}^N$ وليكن $t \in \mathbb{R}$ لدينا

(أ) $d_e(P, Q) \geq 0$ ، $d_e(P, Q) = 0 \iff P = Q$ (ونقول أن المسافة موجبة محددة)

(ب) $d_e(P, Q) = d_e(Q, P)$ (المسافة متماثلة)

(ج) $d_e(P, R) \leq d_e(P, Q) + d_e(Q, R)$ (قاعدة المثلث)

(د) $d_e(tP, tQ) = |t| d_e(P, Q)$ (المسافة متجانسة)

٧-١- تطبيق : معادلة سطح كرة في $\mathbb{R}^3$: لتكن $P(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ ، وليكن $0 < r$ عدد معطى. أوجد معادلة سطح الكرة التي مركزها P ونصف قطرها r

الحل

النقاط التي تقع على سطح الكرة هي تلك النقاط $Q(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ التي تحقق $d_e(Q, P) = r$.
بتربيع الطرفين نجد معادلة الكرة وهي

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

الأقراص والكرات المفتوحة والمغلقة

إذا كانت لدينا نقطة $P \in \mathbb{R}^2$ وأردنا دراسة مجموعة النقاط القريبة من P (وهو ما قد يكون مفيداً لو أردنا دراسة النهايات مثلاً) فإننا نأخذ عدد $0 < r$ ونعتبر مجموعة العناصر

$$D_r(P) = \{ Q \in \mathbb{R}^2 \mid d_e(Q, P) < r \}$$

وتسمى هذه المجموعة من العناصر بـ **القرص المفتوح** الذي مركزه P ونصف قطره r .
نحتاج أحياناً أيضاً لدراسة **القرص المغلق**:

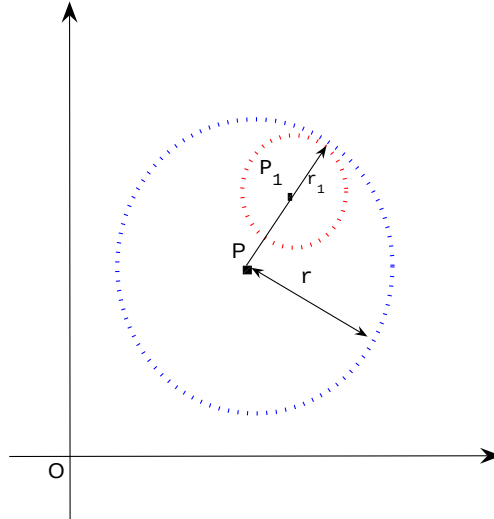
$$\overline{D}_r(P) = \{ Q \in \mathbb{R}^2 \mid d_e(Q, P) \leq r \}$$

وهو عبارة عن مجموعة عناصر القرص المفتوح مضافاً إليها النقاط التي تقع على محيط الدائرة الحدودية للقرص.

٨-١ - أمثلة وملاحظات:

(١) القرصان الصغيران $D_{1/2}(\frac{1}{2}, 0)$ ، $D_{1/2}(\frac{3}{2}, 0)$ محتويان في القرص الكبير $D_1(1, 0)$ لكنهما لا يغطيانه. هل يمكن تغطية القرص الكبير بأي عدد منتهي من الأقراص الأصغر؟

(٢) إذا كان $D_r(P)$ قرص ، وكانت P_1 نقطة فيه وأخذنا $r_1 = r - d_e(P_1, P)$ فإن $D_{r_1}(P_1) \subset D_r(P)$.



(٣) القرص المغلق لا يتمتع بالخاصية السابقة.

من السهل تعميم هذه المفاهيم إلى $\mathbb{R}^N$:

٩-١- تعريف: لتكن $P \in \mathbb{R}^N$ وليكن $0 < r$ ، نعرف الكرة المفتوحة $B_r(P)$ والكرة المغلقة $\bar{B}_r(P)$ كما يلي

$$B_r(P) = \{ Q \in \mathbb{R}^N \mid d_e(Q, P) < r \}$$

$$\bar{B}_r(P) = \{ Q \in \mathbb{R}^N \mid d_e(Q, P) \leq r \}$$

نقاط التراكم والنقاط المعزولة

لو تخيلنا أي مجموعة من النقاط A في المستوى فسنجد أن بعض عناصرها يمكن أن تكون معزولة أي قد تكون تلك العناصر غير لصيقة بالعناصر الأخرى للمجموعة، الصياغة الرياضية لمفهوم النقطة المعزولة هي أن يكون هناك قرص مفتوح لا يحتوي من نقاط تلك المجموعة إلا هذه النقطة، أو بالكتابة الرمزية:

$$\exists r > 0 : D_r(P) \cap A \subseteq \{P\}$$

تلك النقاط المعزولة لا يمكن الاقتراب منها من داخل المجموعة. في المقابل يمكن أن نجد نقطاً من $\mathbb{R}^2$ تقترب منها عناصر المجموعة المختارة كما نشاء، إي يكون بجوار تلك النقط عدد لا نهائي من عناصر المجموعة، الصياغة الرياضية لهذا المفهوم تعطى بالتعريف التالي:

١٠-١- تعريف: لتكن $A \subset \mathbb{R}^2$ ولتكن $P \in \mathbb{R}^2$ ، نقول أن P هي نقطة تراكم للمجموعة A إذا كان

$$\forall r > 0 : (D_r(P) \cap A) \setminus \{P\} \neq \emptyset$$

١١-١- أمثلة وملاحظات:

(١) من الواضح أن أي عنصر من عناصر مجموعة A يكون إما نقطة تراكم لـ A أو نقطة معزولة من A .

(٢) إذا كانت P نقطة تراكم للمجموعة A فإن أي قرص مفتوح مركزه P لابد أن يحوي عدد لا نهائي من عناصر A .

(٣) لتكن

$$A = \mathbb{Q}^2 = \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$$

لو أخذنا أي نقطة $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ فسنجد أن P هي نقطة تراكم للمجموعة A . وذلك لأنه لأي $r > 0$ سنجد عددين قياسيين a, b بحيث $0 < |x - a| < r/2$ و $0 < |y - b| < r/2$. ينتج من ذلك أن $0 < d_e((x, y), (a, b)) < r$ أي أن $(a, b) \in D_r(P)$, $(a, b) \neq P$.

(٤) المجموعة $\mathbb{Z}^2$ ليس لها أي نقط تراكم في $\mathbb{R}^2$ وذلك لأننا لو أخذنا أي عنصر $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ واخترنا $r = 1/2$ فسنجد أن القرص $D_r(P)$ لا يحتوي أي عنصر من $\mathbb{Z}^2$ إلا عنصراً واحداً على الأكثر.

(٥) لتكن

$$A = \{ ((-1)^n \frac{1}{n}, (-1)^{[2n/3]} \frac{3}{2n}) \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

يمكن إثبات أن A لها نقطة تراكم واحدة هي $(0, 0)$. لكن جميع عناصر A هي نقاط معزولة.

الإحداثيات القطبية والكروية والاسطوانية

قبل أن ننتقل للفصل التالي نذكر القارئ أيضا بالإحداثيات القطبية (لر دنتس)، وهي طريقة أخرى لتمثيل نقاط المستوى بأزواج من الأعداد، وتتحدد الإحداثيات عن طريق اختيار

(أ) نقطة ثابتة O تسمى نقطة الأصل أو القطب،

(ب) شعاع منطلق من نقطة الأصل يسمى المحور القطبي،

(ج) وحدة قياس للأطوال.

ولتمثيل نقطة بالإحداثيات القطبية نأخذ الزوج (r, θ)

r = طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة والقطب

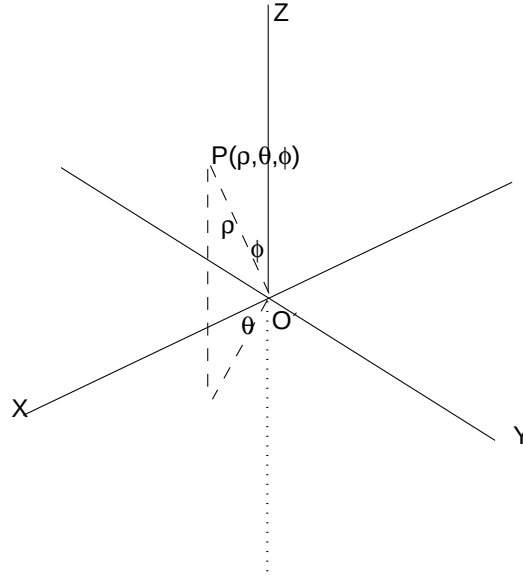
θ = قياس الزاوية بين المحور القطبي والشعاع من O إلى النقطة المعطاة

في الفراغ الثلاثي يوجد تمثيلان مشابهان لتمثيل القطبي، الأول هو التمثيل الكروي وفيه نختار

(أ) نقطة ثابتة O تسمى نقطة الأصل أو القطب،

(ب) ثلاثة محاور كارتيزية متعامدة نسميها محور X ومحور Y ومحور Z ،

(ج) وحدة قياس للأطوال.



شكل ٦: الإحداثيات الكروية في $\mathbb{R}^3$

ولتمثيل النقطة P بإحداثيات كروية نأخذ الثلاثي المرتب (ρ, θ, φ)

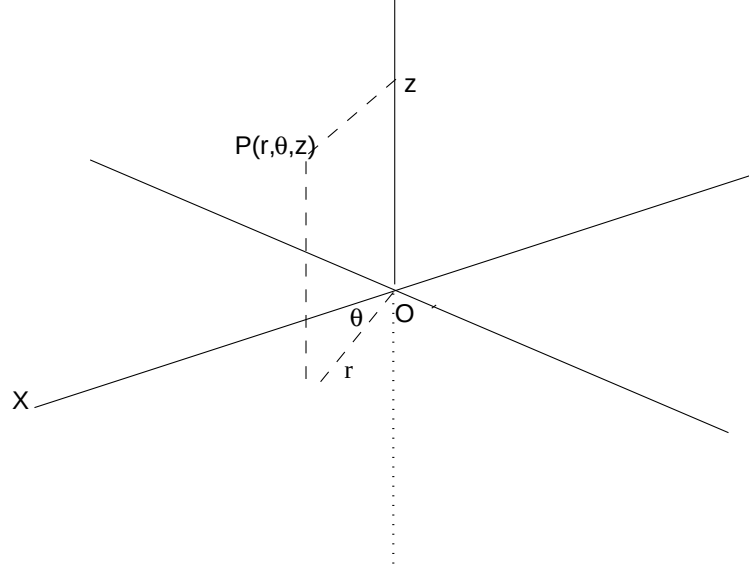
ρ = طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة والقطب

θ = قياس الزاوية بين الشعاع الواصل من O إلى مسقط P على المستوى XY وبين محور X

φ = قياس الزاوية بين الشعاع الواصل من O إلى P وبين محور Z

أما التمثيل الآخر فيسمى الإحداثيات الأسطوانية ولتعريفه نختار

- (أ) نقطة ثابتة O تسمى نقطة الأصل أو القطب،
 (ب) ثلاثة محاور كارتيزية متعامدة نسميها محور X ومحور Y ومحور Z ،
 (ج) وحدة قياس للأطوال.



شكل ٧: الإحداثيات الاسطوانية في $\mathbb{R}^3$
 ونمثل النقطة P بإحداثيات إسطوانية بأخذ الثلاثي المرتب (r, θ, z) حيث r, θ هي الإحداثيات القطبية لمسقط النقطة P على المستوى XY بينما z هي ارتفاع (أو انخفاض) النقطة P عن المستوى XY .
 ١٢.١ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

- (١) في $\mathbb{R}^2$ لدينا
 () جميع العمليات الجبرية مثل $\mathbb{R}$
 () عمليات الجمع والضرب بين عناصرها معرفة
 () عملية الجمع لها نفس الخواص المعتادة لعملية الجمع على $\mathbb{R}$
 () لا توجد أي عمليات جبرية معرفة
- (٢) الإحداثيات القطبية لنقطة الأصل O في $\mathbb{R}^2$ هي
 () غير معرفة $r = 0, \theta = 0$ ()
 () $r = \infty, \theta = 0$ $r = 0, \theta = 2\pi$ ()
- (٣) القرص المغلق في $\mathbb{R}^2$
 () لا يحتوي قرصا مغلقا آخر
 () لا يحتوي قرصا مفتوحا
 () لا يكون جزءا من قرص مفتوح
 () يكون جزءا من قرص مفتوح
- (٤) أي مجموعة منتهية في $\mathbb{R}^N$
 () ليس لها نقاط تراكم
 () تكون جميع نقاطها نقاط تراكم
 () جميع نقاطها نقاط معزولة
 () ليس بها نقاط معزولة
- (٥) إذا كانت للنقطة $P \in \mathbb{R}^2$ الإحداثيات الكارتيزية $(x, y) \neq (0, 0)$ فإن إحداثياتها القطبية هي
 () $r = x^2 + y^2, \theta = \arctan(y/x)$
 () $r = x, \theta = y$
 () ليست أي مما سبق
 () $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x)$

١٣.١ تمارين

(١) أوجد الإحداثيات القطبية للنقاط التي إحداثياتها الكارتيزية

$$\begin{array}{ccc} (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) & (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) & (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ (x, 2x) & (2x, x) & (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{array}$$

(٢) أوجد العلاقات بين الإحداثيات الكارتيزية وكل من الإحداثيات الكروية والاسطوانية في $\mathbb{R}^3$

(٣) أكتب معادلة الخط المستقيم $ax + by + c = 0$ في الإحداثيات القطبية.

(٤) أكتب معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1 في كل من الإحداثيات الكروية والكارتيزية.

(٥) أكتب معادلة الأسطوانة التي نصف قطرها 1 وارتفاعها h ومحورها هو محور Z وقاعدتها على المستوى XY في الإحداثيات الاسطوانية.

(٦) بين كيف يمكن تعريف نظام إحداثيات مشابه للإحداثيات القطبية والكروية في $\mathbb{R}^N$

٢.١ المتجهات في $\mathbb{R}^N$

المتجهات هي طريقة أخرى لتمثيل عناصر $\mathbb{R}^N$ هندسيا، إذ أن أي نقطة في المستوى أو في الفراغ يمكن تمثيلها بمتجه موضع، ونقصد به القطعة المستقيمة الموجهة الواصلة من نقطة الأصل إلى النقطة المعطاة. وتتميز المتجهات بأنها تتحدد تماما بمعرفة الطول والاتجاه.

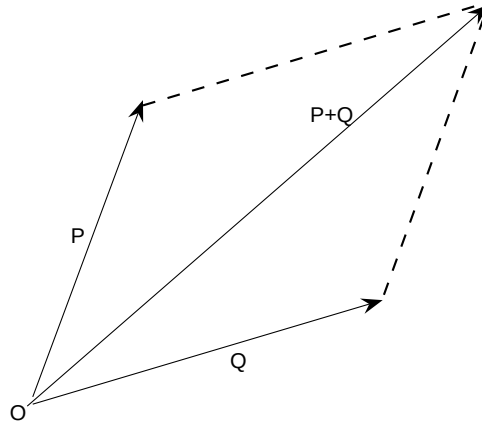
يعطى متجه الموضع لنقطة $O \neq P$ بطريقتين: إما بالإحداثيات الكارتيزية للنقطة P (والتي نسميها مركبات المتجه)، أو بإحداثياتها القطبية (والتي تمثل طول المتجه واتجاهه). وبالتالي يتضح أن عناصر $\mathbb{R}^N$ يمكن وضعها في تناظر أحادي مع مجموعة المتجهات ذات N -مركبة.

نستطيع دائما إيجاد طول متجه بمعرفة مركباته، وذلك باستخدام نظرية فيثاغورس (وتعميمها)، فمن الواضح أن طول متجه $\vec{u} = (x, y)$ في $\mathbb{R}^2$ هو

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

وبنفس الأسلوب نعرف طول متجه $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ بأنه

$$(١.١) \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N u_k^2}$$



شكل ٨: جمع المتجهات

من هذا التناظر يمكننا تعريف عملية الجمع للمتجهات وعملية ضرب متجه في عدد حقيقي، ونلاحظ أن

١٤-١ - الوصف الهندسي للعمليات الجبرية على المتجهات:

(أ) مجموع متجهي موضع $\vec{OP}$ ، $\vec{OQ}$ يعطى بقطر متوازي الأضلاع الذي ضلعا $\vec{OP}$ ، $\vec{OQ}$

(ب) ناتج ضرب متجه $\vec{OP}$ في عدد حقيقي t يكون طولاً مساوياً لمقياس t مضروباً في طول $\vec{OP}$ ، واتجاهه هو نفس اتجاه $\vec{OP}$ إذا كان t موجباً وإلا الاتجاه المعاكس إذا كان t سالباً.

(ج) وبالعكس إذا كان المتجهان $\vec{OP}$ ، $\vec{OQ}$ في نفس الاتجاه فإن أحدهما يساوي ناتج ضرب الآخر في عدد حقيقي موجب، وإذا كان متعاكسين في الاتجاه فإن أحدهما يساوي ناتج ضرب الآخر في عدد حقيقي سالب.

١٥-١ - متجهات الوحدة: إذا أعطينا متجه $\vec{u}$ فإن متجه الوحدة في اتجاه $\vec{u}$ هو

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

نستفيد من المتجهات في وضوح تمثيلها الهندسي والعمليات الجبرية عليها، ولتوضيح ذلك سنبين كيف ندرس معادلات الخط المستقيم في المستوى وفي الفراغ ثلاثي الأبعاد وفي الفراغ ذو N -بعد

١٦-١ - المعادلات الاتجاهية والبارامترية للخط المستقيم في $\mathbb{R}^2$: لنكن $P(x_1, y_1)$ ، $Q(x_2, y_2)$ نقطتان مختلفتان في المستوى، سندرس معادلات الخط L الذي تقع عليه هاتان النقطتان، يمكن معرفة

هذا الخط باستخدام

(١) P, Q تقعان على $\mathcal{L}$

(٢) $\overrightarrow{PQ}$ في اتجاه $\mathcal{L}$

لتكن $S(x, y) \in \mathcal{L}$ ، من الواضح أن $\overrightarrow{PS}$ في اتجاه $\pm \overrightarrow{PQ}$ وبالتالي

$$(١.٢) \quad \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

نربط هذه المعادلة بين متجه موضع أي نقطة $S \in \mathcal{L}$ على الخط وبين المتجهات المعروفة $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{PQ}$ ونسمى (١.٢) المعادلة الاتجاهية للخط $\mathcal{L}$. بالتعويض بالإحداثيات في هذه المعادلة نجد

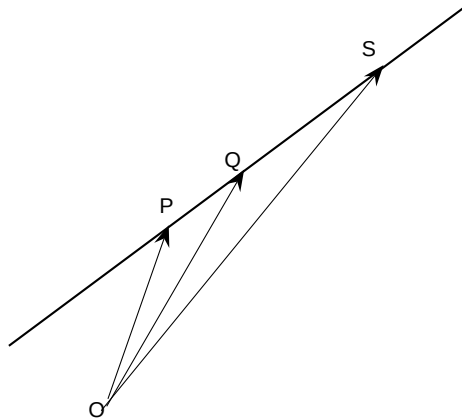
$$(١.٣) \quad x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

نسمى هاتان المعادلتان بالمعادلات البارامترية للخط $\mathcal{L}$. وبشطب λ بين هاتين المعادلتين نتوصل إلى الصورة المعتادة

$$(١.٤) \quad ax + by + c = 0$$

حيث

$$(١.٥) \quad a = (y_1 - y_2), \quad b = (x_2 - x_1), \quad c = (y_2 - y_1)x_1 + (x_1 - x_2)y_1$$



شكل ٩: استنتاج المعادلة الاتجاهية للخط المستقيم

من الهام أن نلاحظ أن الأفكار التي استخدمناها عاليه لا تعتمد سوى على الخواص الجبرية والهندسية للمتجهات، ويمكن تعميمها لأي عدد من الأبعاد، نلخص ذلك في

١٧-١- المعادلات الاتجاهية والبارامترية للخط المستقيم في $\mathbb{R}^N$: إذا أعطينا نقطتان مختلفتان $P(x_1, \dots, x_N), Q(y_1, \dots, y_N)$ في $\mathbb{R}^N$ ، فإن الخط المستقيم المار بهاتين النقطتين تكون له المعادلة الاتجاهية

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + t.\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R}$$

والمعادلات البارامترية

$$z_1 = x_1 + t(y_1 - x_1), \dots, z_N = x_N + t(y_N - x_N), \quad t \in \mathbb{R}$$

لأي نقطة $S(z_1, \dots, z_N) \in \mathcal{L}$.

الضرب القياسي للمتجهات

نُعرّف حاصل الضرب القياسي لمتجهين بأنه العدد الحقيقي الذي تكون نسبته لطول أحد المتجهين مساوية لطول مسقط المتجه الآخر عليه (أو لسالب هذا الطول إذا كان المسقط في عكس اتجاه المتجه) وباستخدام حساب المثلثات يمكن إثبات أنه في $\mathbb{R}^2$ يكون حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ ، $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ هو العدد

$$(١.٦) \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos \theta = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين.

كذلك في $\mathbb{R}^3$ لأي متجهين $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ، $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ يعطى حاصل الضرب القياسي بالعلاقة

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

وبتعميم ذلك لأي عدد من الأبعاد يكون لأي متجهين $\overrightarrow{u} = (u_1, \dots, u_N)$ ، $\overrightarrow{v} = (v_1, \dots, v_N)$ حاصل ضربهما القياسي هو العدد الحقيقي

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \sum_{k=1}^N u_k v_k$$

نلاحظ أن التعريف الهندسي لحاصل الضرب القياسي يؤدي مباشرة للنتيجة التالية

١٨-١-: حاصل الضرب القياسي لمتجهين يساوي الصفر إذا وفقط إذا تكامد المتجهان أو كان أحدهما المتجه الصفر.

العلاقات التالية يمكن إثباتها بسهولة من تعريف حاصل الضرب القياسي

١٩-١- الخواص الجبرية لحاصل الضرب القياسي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (أ)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ لأي } (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (ب)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (ج)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ لكل } \vec{v} \in \mathbb{R}^N \text{ فإن } \vec{u} = \vec{0} \quad (د)$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad (هـ)$$

سنعطي فيما يلي بعض تطبيقات حاصل الضرب القياسي

٢٠-١- **تطبيق ١: معادلة الخط المستقيم العمودي على خط معطى والمار بنقطة معطاة في $\mathbb{R}^2$:** ليكن $\mathcal{L} : ax + by + c = 0$ خط مستقيم و $P(x_0, y_0)$ نقطة في المستوى ، أوجد معادلة الخط $\mathcal{L}^\perp$ العمودي على $\mathcal{L}$ والمار بالنقطة P

الحل

لتكن $R(x_1, y_1), S(x_2, y_2)$ نقطتان مختلفتان على $\mathcal{L}$ ونضع $\vec{u} = (a, b)$ ، نلاحظ أن

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{RS} = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

أي أن $\vec{u} \perp \overrightarrow{RS}$ ، وبالتالي فإن اتجاه $\vec{u}$ هو اتجاه $\mathcal{L}^\perp$. وبالتالي يمكن إيجاد المعادلة الانجائية للمستقيم $\mathcal{L}^\perp$:

$Q(x, y) \in \mathcal{L}^\perp$ إذا وفقط إذا كان $t \in \mathbb{R}$ ، $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t\vec{u}$ ، أو في الصورة البارامترية

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R}$$

وبحذف t بين هاتين المعادلتين لنوجد المعادلة

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$$

٢١-١- **تطبيق ٢: المسافة بين نقطة وخط مستقيم في $\mathbb{R}^2$:** أوجد المسافة بين النقطة $P(x_0, y_0)$ والخط المستقيم $\mathcal{L} : ax + by + c = 0$

الحل

لتكن $M = (x_1, y_1)$ هي قدم العمود الساقط من $P(x_0, y_0)$ على $\mathcal{L}$ ، من الواضح أن المسافة

$$d(P, \mathcal{L}) = \|\overrightarrow{PM}\|$$

لكن $\overrightarrow{PM}$ عمودي على $\mathcal{L}$ وبالتالي $\overrightarrow{PM} = t(a, b)$ أو $x_1 - x_0 = ta, y_1 - y_0 = tb$ فينتج أن

$$\|\overrightarrow{PM}\| = |t| \sqrt{a^2 + b^2}$$

من ناحية أخرى

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{L} &\implies ax_1 + by_1 + c = 0 \implies a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c = 0 \\ &\implies t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

فوجد في النهاية

$$d(P, \mathcal{L}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

٢٢-١ - تطبيق ٣: معادلة المستوى في $\mathbb{R}^3$ بمعلومية نقطة عليه واتجاه العمودي: أوجد معادلة المستوى في $\mathbb{R}^3$ الذي يحوي النقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ ويكون المتجه $\vec{u} = (a, b, c)$ عموديا عليه.

الحل

لتكن $Q(x, y, z)$ نقطة على المستوى المطلوب ، المتجه $\overrightarrow{PQ}$ يقع في ذلك المستوى فيكون بالتالي عموديا على $\vec{u}$ أي أن

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

وهي معادلة المستوى ، ويمكن كتابتها بالإحداثيات على الصورة

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ونلاحظ أن معاملات x, y, z في المعادلة الكاريزية للمستوى هي مركبات متجه عمودي على المستوى.

٢٣-١ - تطبيق ٤: المسافة بين نقطة ومستوى: إذا أعطيت مستوى $\mathcal{H}$ معادلته $ax + by + cz + d = 0$ ونقطة $P(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ ، أوجد المسافة بين P و $\mathcal{H}$.

الحل

لتكن $M = (x_1, y_1, z_1)$ هي قدم العمود الساقط من P على $\mathcal{H}$ ، المسافة المطلوبة هي $d(P, \mathcal{H}) = \|\overrightarrow{PM}\|$.

ومثل حالة تطبيق ٢ نلاحظ أن $\overrightarrow{PM}$ في نفس اتجاه (a, b, c) وبالتالي $\|\overrightarrow{PM}\| = |t| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ وبالتالى $d(P, \mathcal{H}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ من ناحية أخرى

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{H} &\implies ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ &\implies a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c(z_0 + tc) + d = 0 \\ &\implies t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

فوجد في النهاية

$$d(P, \mathcal{H}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

٢٤-١ - ملاحظة هامة: من المعتاد إلا نميز بين النقطة $P \in \mathbb{R}^N$ وبين متجه الموضع $\overrightarrow{OP}$ ، فنكتب مثلا $\|P\|$ بدلا من $\|\overrightarrow{OP}\|$. لاحظ أن هذا التطابق يتماشى مع عمليات الجمع والضرب في عدد حقيقي، ولاحظ أيضا أن

$$d_e(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\| = \|P - Q\|$$

الضرب الاتجاهي لمتجهين في $\mathbb{R}^3$

في الفراغ الثلاثي نعرف حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين $\vec{u}, \vec{v}$ بأنه متجه $\vec{u} \times \vec{v}$ عمودي على المستوى الذي يضم هذين المتجهين وطوله يساوي مساحة متوازي الأضلاع

الذي ضلعه $\vec{u}$ ، $\vec{v}$. من الواضح أن العبارة السابقة تحدد طول المتجه المطلوب ، لكنها لا تحدد اتجاهه تماما. فهناك اتجاهان متعاكسان كلاهما عمودي على أي مستوى، لذلك أصطلح على قاعدة البريمة اليمينية: نختار اتجاه حاصل الضرب الاتجاهي بحيث يصنع الثلاثي المرتب $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ بريمة يمينية.

وباستخدام المركبات: إذا كان $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ و $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ فإن

$$\vec{u} \times \vec{v} = (w_1, w_2, w_3) \text{ حيث}$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$w_2 = - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

ويعطى طول حاصل الضرب الاتجاهي بالعلاقة

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

حيث θ هي الزاوية المحصورة بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

٢٥-١ - تطبيق ٥: معادلة المستوى في $\mathbb{R}^3$ بمعلومية ثلاث نقاط عليه: أوجد معادلة المستوى في $\mathbb{R}^3$ الذي يحوي النقاط $P(x_1, y_1, z_1)$ ، $Q(x_2, y_2, z_2)$ ، $R(x_3, y_3, z_3)$.

الحل
المتجهان $\vec{PQ}$ و $\vec{PR}$ يقعان في المستوى المطلوب $\mathcal{H}$ ، بالتالي يكون إنجاه العمودي على المستوى هو $\vec{PQ} \times \vec{PR} = (a, b, c)$ حيث:

$$a = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

$$b = - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

ونعطي معادلة المستوى بالعلاقة

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

٢٦.١ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

(١) أي متجهان في $\mathbb{R}^2$ يكونان	()
لهما نفس الاتجاه	()
قد يحققا أيا مما سبق	()
متعامدان	()
غير متعامدين	()

- (٢) مجموع متجهين
 () لا يكون في إتجاه أي منهما
 () لا يمكن أن يتعامد على أي منهما
 () يكون في نفس اتجاه أحدهما
 () يكون عموديا على أحدهما
- (٣) حاصل الضرب القياسي لمتجهين هو
 () عدد حقيقي
 () خط مستقيم
 () عدد قياسي
 () متجه
- (٤) المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ تمثل
 () خط مستقيم في المستوى
 () خط مستقيم في الفراغ الثلاثي
 () مستوى في الفراغ الثلاثي
 () متجه

٢٧.١ تمارين

- (١) أوجد حاصل الضرب القياسي للمتجهات الآتية، وبين في كل حالة ما إذا كانت المتجهات متعامدة أم لا وما إذا كانت في نفس الإتجاه أم لا
 $(1, 1), (-1, 1)$ $(1, 1, 0), (1, 0, 1)$ $(0, 1, 0), (1, 0, 0)$
 $(1, 1, 1), (1, 1, 2)$ $(2, 3, 1), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ $(1, \sqrt{3}, \sqrt{2}), (\sqrt{3}, -2, \sqrt{3/2})$
- (٢) في $\mathbb{R}^3$ أوجد المعادلة الإتجاهية للخط المستقيم العمودي على المستوى $\mathcal{H} : x = 1$ والمار بنقطة الأصل .
- (٣) أوجد معادلة المستوى في $\mathbb{R}^3$ بمعلومية نقطتين عليه والمسافة بينه وبين نقطة معلومة خارجة.
- (٤) أوجد الصورة العامة لمعادلة جميع المستويات التي توازي مستو معطى.