

التفاضل والتكامل المتقدم (٢٣١)
مسائل محلولة

(١) لتكن P_0 نقطة في $\mathbb{R}^3$ وليكن $\vec{u}$ متجهه في $\mathbb{R}^3$ ، برهن أن الخط المستقيم

$$\mathcal{L} = \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{u} \}$$

عمودي على المستوى

$$\mathcal{P} = \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} - \overrightarrow{OP_0} \cdot \vec{u} = 0 \}$$

الحل نلاحظ أن النقطة P_0 تقع على كل من الخط المستقيم $\mathcal{L}$ والمستوى $\mathcal{P}$ (لأنها تحقق المعادلتين). نأخذ أي نقطة $P_1 \in \mathcal{L}$ على الخط المستقيم ونثبت أن المتجه $\overrightarrow{P_0P_1}$ عمودي على المستوى : من معادلة الخط المستقيم نجد أنه يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{u}$ ، إذن

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \lambda \vec{u}$$

لكننا نعلم أن $\vec{u}$ هو متجه عمودي على المستوى، وكذلك $\overrightarrow{P_0P_1}$. يثبت هذا أن القطعة المستقيمة الواصلة من P_0 لأي نقطة على الخط المستقيم تكون عمودية على المستوى. أي أن الخط $\mathcal{L}$ عمودي على المستوى $\mathcal{P}$.

طريقة أخرى لكتابة الحل

نأخذ نقطة Q على المستوى $\mathcal{P}$ ونأخذ P نقطة على الخط المستقيم $\mathcal{L}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{P_0Q} &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_0}) \\ &= \lambda \vec{u} \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_0}) \\ &= \lambda (\vec{u} \cdot \overrightarrow{OQ} - \vec{u} \cdot \overrightarrow{OP_0}) = 0 \end{aligned}$$

يثبت هذا أن القطعتين المستقيمتين $\overrightarrow{P_0P}$ و $\overrightarrow{P_0Q}$ متعامدان. أي أن الخط المستقيم عمودي على أي قطعة مستقيمة في المستوى مارة بنقطة التقاطع.

(٢) لتكن $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ ولتكن

$$\mathcal{A} = \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid d_e(P, P_1) = d_e(P, P_2) \}$$

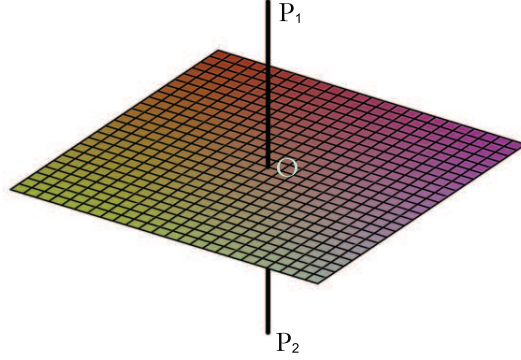
(أ) ما هو الشكل الهندسي لهذه المجموعة؟

(ب) هل هي مجموعة مفتوحة؟ هل هي مغلقة؟ هل هي مجموعة محدودة؟

الحل

(أ) للتعرف على الشكل نلاحظ أن المسألة معطاة دون إحداثيات، لذلك نأخذ الإحداثيات التي تناسبنا، النقطتان P_1, P_2 هما المعطيان الثابتان في المسألة، ومن الواضح أن نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{P_1P_2}$ نحقق الشرط المعطى. نأخذ تلك النقطة كنقطة أصل ونأخذ محور Z في اتجاه $\overrightarrow{P_1P_2}$ ، فيكون لدينا (بفرض أن $P_1 \neq P_2$)

$$P_1(0, 0, c), \quad P_2(0, 0, -c) \quad \text{حيث } c \text{ ثابت موجب}$$



من الرسم نتوقع أن تكون المجموعة $\mathcal{A}$ هي مجموعة النقاط الواقعة على المستوى XY . لإثبات ذلك نفرض أن $Q(x, y, 0)$ أي نقطة في المستوى XY . نجد أن

$$\begin{aligned} d_e(Q, P_1) &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (0-c)^2} \\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (0+c)^2} = d_e(Q, P_2) \end{aligned}$$

وهو ما يثبت أن $Q \in \mathcal{A}$. من جهة أخرى نأخذ $P(x, y, z)$ أي نقطة في المجموعة $\mathcal{A}$ فنجد أن

$$\begin{aligned} d_e(P, P_1) = d_e(P, P_2) &\implies \sqrt{x^2 + y^2 + (z-c)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+c)^2} \\ &\implies (z-c)^2 = (z+c)^2 \implies -2cz = 2cz \implies z = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن P تقع على المستوى XY .

النتيجة: $\mathcal{A}$ هي مجموعة النقاط الواقعة على المستوى العمودي على $\overline{P_1P_2}$ والمار بنقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{P_1P_2}$.

(ب) سنبدأ بدراسة النقط الحدودية للمجموعة $\mathcal{A}$ ، نعلم أن نقطة تكون نقطة حدودية إذا وفقط إذا كان

$$\forall r > 0 : B_r(P) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset \text{ and } B_r(P) \cap \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$$

نلاحظ أنه إذا كانت $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A}$ فإن المسافة بين P وبين المستوى $\mathcal{A}$ تكون موجبة. لتكن تلك المسافة d . نأخذ $r = d/2$ فنجد أن أي نقطة في هذه الكرة لا تقع على المستوى. بالتالي تكون P نقطة خارجية عن $\mathcal{A}$ وليست نقطة حدودية. يمكن ملاحظة أن هذا يؤدي لأن مكمل $\mathcal{A}$ مجموعة مفتوحة وبالتالي تكون $\mathcal{A}$ مجموعة مغلقة.

من جهة أخرى إذا كانت $P \in \mathcal{A}$ فإن أي كرة $B_r(P)$ ستحتوي نقطا على العمود المقام من P على المستوى $\mathcal{A}$ ويمكن أخذ نقطة على هذا العمود على مسافة $r/2$ من P فتكون هذه النقطة بالضرورة تنتمي لـ $\mathcal{A} \setminus \mathbb{R}^3$. أي أن أي كرة مركزها P تتقاطع مع مكمل $\mathcal{A}$ وبالطبع تتقاطع أيضا مع $\mathcal{A}$ لأن $P \in \mathcal{A}$. إذن P نقطة حدودية لـ $\mathcal{A}$.
النتيجة: $\mathcal{A}$ مجموعة مغلقة، والنقاط الحدودية لـ $\mathcal{A}$ هي جميع عناصر $\mathcal{A}$.

(٣) ليكن $\mathcal{L}$ خط مستقيم عمودي على المستوى $\mathcal{P}$ في $\mathbb{R}^3$ ، ولتكن

$$\mathcal{B} = \{ Q \in \mathbb{R}^3 \mid (d(Q, \mathcal{L}))^2 < d(Q, \mathcal{P}) \}$$

(أ) ما هو الشكل الهندسي لهذه المجموعة؟

(ب) هل هي مجموعة مفتوحة؟ هل هي مغلقة؟ هل هي مجموعة محدودة؟

الحل

(أ) في هذه المسألة أيضا سنختار الإحداثيات المناسبة لتبسيط الحل. نأخذ نقطة الأصل هي نقطة تقاطع $\mathcal{L}$ مع $\mathcal{P}$. ونأخذ $\mathcal{L}$ كمحور Z . فيكون $\mathcal{P}$ هو المستوى XY .
إذا كانت $Q(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ فإن

$$d(Q, \mathcal{L}) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad d(Q, \mathcal{P}) = |z|$$

وبالتالي يكون

$$Q \in \mathcal{B} \iff x^2 + y^2 < |z|$$

من الواضح أن المجموعة $\mathcal{B}$ متماثلة بالنسبة لكل من محاور الإحداثيات. ندرس تقاطع المجموعة مع مستوى $z = c$. فنجد أن $Q(x, y, c)$ تنتمي لهذا التقاطع إذا وفقط إذا كان $|c| < x^2 + y^2$. وهو ما يعني أن Q تقع داخل دائرة مركزها $(0, 0, c)$ ونصف قطرها $\sqrt{c}$.
ندرس تقاطع المجموعة مع مستوى $y = b$. فنجد أن نقاط التقاطع نحقق

$$|z| = x^2 + b^2$$

وهي عبارة عن مجموعة محدودة بالقطعين المكافئين $z = x^2 + b^2, z = -x^2 - b^2$ الواقعين في المستوى $y = b$.
يتضح من ذلك أن المجموعة $\mathcal{B}$ عبارة عن الجزء الداخلي لمجسم دوراني ينتج عن دوران القطعين المكافئين $z = x^2, z = -x^2$ حول محور Z .

