

حل مسائل الواجب للأسبوع الأول من أكتوبر

تمرين (١)

أوجد صيغة لحساب المسافة بين خط مستقيم في $\mathbb{R}^3$ ونقطة خارجه.

الحل

ليكن $\mathcal{L}$ خط مستقيم معادلته هي

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{u}, \quad P_1 \in \mathcal{L}, \quad \overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

ولتكن P_0 نقطة لا تقع على الخط. ولنفرض أن M هي مسقط P_0 على الخط $\mathcal{L}$. حيث أن M تقع على الخط فإنه توجد λ_M بحيث

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda_M \overrightarrow{u}$$

ولأي $P \in \mathcal{L}$ يكون المتجه $\overrightarrow{PM}$ عمودياً على $\overrightarrow{P_0M}$ ، أي

$$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OM}) = 0$$

من هذه المعطيات نجد أن

$$0 = (\lambda - \lambda_M) \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1} - \lambda_M \overrightarrow{u})$$

وباختيار $\lambda = \lambda_M + 1$ نتوصل إلى

$$0 = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1}) - \lambda_M \|\overrightarrow{u}\|^2$$

والتي يمكن منها حساب قيمة λ_M :

$$\lambda_M = \frac{\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1})}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$$

الآن لحساب المسافة بين P_0 و $\mathcal{L}$ نوجد $\|\overrightarrow{P_0M}\|$:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{P_0M}\|^2 &= \|\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1} - \lambda_M \overrightarrow{u}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1}\|^2 - 2\lambda_M \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1}) + \lambda_M^2 \|\overrightarrow{u}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1}\|^2 - 2 \frac{(\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1}))^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} + \frac{(\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1}))^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \\ &= \|\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1}\|^2 - \frac{(\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1}))^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2}. \end{aligned}$$

تمرين (٢)

إوجد التمثيل البارامتري للمنحنى

$$C : (a \cos \theta, a \sin \theta, a\theta/(2\pi)), \quad \theta \in [0, 8\pi]$$

باستخدام البارامتر s = طول المنحنى.

الحل

نبدأ أولاً بحساب طول المنحنى بين النقطة $P_0 = (a, 0, 0)$ (التي تناظر الطرف الأسفل للمنحنى عند $\theta = 0$) وبين نقطة اختيارية $P(a \cos \theta, a \sin \theta, a\theta/(2\pi))$ على المنحنى

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\theta \sqrt{(-a \sin \phi)^2 + (a \cos \phi)^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} d\phi \\ &= \int_0^\theta \frac{a}{2\pi} \sqrt{1 + 4\pi^2} d\phi \\ &= \frac{a\sqrt{1 + 4\pi^2}}{4\pi} \theta \end{aligned}$$

فيكون التمثيل البارامتري هو:

$$(a \cos G(s), a \sin G(s), aG(s)/(2\pi)), \quad [0, 2a\sqrt{1 + 4\pi^2}]$$

$$G(s) = \frac{4\pi s}{a\sqrt{1 + 4\pi^2}} \text{ حيث}$$