



التفاضل والتكامل المتقدم (٢٣١) - اختبار (٢)
الثلاثاء ١٩ نوفمبر ٢٠٠٨

حل الاختبار

السؤال الأول

بين أي من العبارات الآتية صحيح وأيها خطأ

- (أ) النقطة $(1, -1)$ نقطة حدودية للمجموعة $A = \{(x, y) | \max(|x|, |y|) < 1\}$ (صحيحة) لأنه لأي $r > 0$ يمكن أن نأخذ النقطة $P = (1 - r/2, -1 + r/2)$ التي تنتمي للمجموعة A ومسافتها عن $(1, -1)$ أقل من r بينما النقطة $(1, -1)$ نفسها لا تنتمي إلى A . أي أن القرص المفتوح الذي مركزه $(1, -1)$ ونصف قطره r يحتوي عنصر من A وعنصراً من مكمل A .
- (ب) إذا كان C منحنى معطى بالدالة $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ فإن طول المنحنى هو $F(b) - F(a)$ (خطأ) لأن $F(b) - F(a)$ عنصر في $\mathbb{R}^2$ بينما طول المنحنى يجب أن يكون عدداً. أيضاً لأن طول المنحنى يعطى بالعلاقة المعروفة

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt$$

حيث $F(t) = (f(t), g(t))$

(ج) المعادلة $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{OP_0} \cdot \vec{u} = 0$ تمثل مستوى في الفراغ الثلاثي.

(صحيحة) لأن هذه معادلة مستوى عمودي على $\vec{u}$ ويتضمن النقطة $-P_0$.

- (د) إذا كانت $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ وكانت $P_0 \in \mathbb{R}^2$ فإن وجود $\vec{\nabla} f(P_0)$ يضمن وجود المشتقة الاتجاهية $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$ لأي متجه وحدة $\vec{u}$. (خطأ) كمثال: الدالة

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

نحقق أن $\vec{\nabla} f(0, 0)$ موجود، بينما $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$ غير موجود للمتجه $\vec{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

السؤال الثاني

نتكن $f(x, y) = \frac{x^2 y^3 + y^2 x^3}{x^4 + y^4}$ ، ولتكن $\varphi(t) = at, \psi(t) = bt$ حيث $(a, b) \neq (0, 0)$.

(أ) أوجد نطاق الدالة f .

الحل: هذه الدالة دالة كسرية جبرية. بالتالي فهي معرفة عند جميع نقاط $\mathbb{R}^2$ عدا أصفار المقام. ونلاحظ أن المقام $x^4 + y^4$ يساوي الصفر فقط عند $(0, 0)$.

بالتالي فإن نطاق $f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi(t), \psi(t))}{t} \quad \text{(ب) أوجد}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi(t), \psi(t))}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)^2 \psi(t)^3 + \varphi(t)^3 \psi(t)^2}{t(\varphi(t)^4 + \psi(t)^4)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^2 b^3 t^5 + a^3 b^2 t^5}{t(a^4 t^4 + b^4 t^4)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^2 b^3 + a^3 b^2}{a^4 + b^4} \\ &= \frac{a^2 b^3 + a^3 b^2}{a^4 + b^4}. \end{aligned}$$

(ج) نتكن

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \text{Dom } f, \\ 0, & (x, y) \notin \text{Dom } f. \end{cases}$$

$$(١) \text{ هل } \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(0, 0) \text{ موجودة لأي متجه وحدة } \vec{u} \text{ ؟}$$

الحل: من (أ) نجد أن

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3 + y^2 x^3}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

ليكن $\vec{u} = (a, b)$ متجه وحدة. نعلم من تعريف المشتقة الاتجاهية أن

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g((0, 0) + t\vec{u}) - g(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb)}{t} \\ &= \frac{a^2 b^3 + a^3 b^2}{a^4 + b^4} \quad \text{من (ب).} \end{aligned}$$

بالتالي فإن المشتقة الاتجاهية موجودة في اتجاه $\vec{u}$.

$$(٢) \text{ هل } g \text{ قابلة للاشتقاق عند } (0, 0) \text{ ؟}$$

$$\text{الحل: من (أ). بأخذ } \vec{u} = (1, 0) \text{ نجد أن } \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0 \text{ وبأخذ } \vec{u} = (0, 1) \text{ نجد أن } \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$$

لدراسة القابلية للاشتقاق نضع

$$\epsilon(x, y) = g(x, y) - g(0, 0) - (x - 0) \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) - (y - 0) \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = g(x, y)$$

$$\text{وندرس } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\epsilon(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ (تعريف القابلية للاشتقاق).}$$

بأخذ المسار $\varphi(t) = at, \psi(t) = bt$ نجد أن

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\epsilon(\varphi(t), \psi(t))}{\sqrt{\varphi(t)^2 + \psi(t)^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi(t), \psi(t))}{|t| \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 b^3 + a^3 b^2}{(a^4 + b^4) \sqrt{a^2 + b^2}}$$

وهو ما يوضح أن النهاية تعتمد على المسار، وحيث أن النهاية إن وجدت لا يمكن أن تختلف باختلاف المسار (نظرية). فإننا نستنتج أن النهاية غير موجودة. ومن ذلك ينتج أن الدالة $g(x, y)$ غير قابلة للاشتقاق عند $(0, 0)$.

(٣) إحصب $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ إن وجدت.

الحل: من الحسابات السابقة في (٢) ومن جبر المشتقات نجد أن:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{-y^2 x (2 y x^4 - 2 y^5 + x^5 - 3 x y^4)}{(x^4 + y^4)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

ولإيجاد المشتقة من الرتبة الثانية نستخدم جبر المشتقات للحصول على

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2 y^2 (3 y x^8 - 12 x^4 y^5 + y^9 + x^9 - 12 x^5 y^4 + 3 x y^8)}{(x^4 + y^4)^3}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

أما عند نقطة الأصل فلا بد من الرجوع للتعريف:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, 0) - \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)}{x} = 0.$$