

المحاضرة (13)

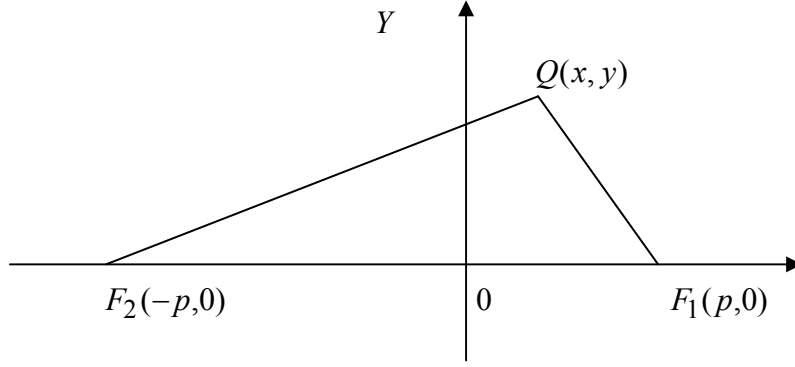
ثانياً: القطع الناقص (The Ellipse)

يعرف القطع الناقص على أنه المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوي بحيث أن مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوي F_1, F_2 يساوي مقدار ثابت $2a$. تسمى F_1, F_2 بؤرتا القطع الناقص.

ويمكن أيضاً تعريف القطع الناقص تعريفاً مختلفاً عن التعريف السابق وذلك باستخدام ما يعرف بالاختلاف المركزي e .

فإذا تحركت نقطة في مستو معلوم فإن النسبة بين بعدها عن نقطه ثابتة في هذا المستوي (البؤرة) وبعدها عن مستقيم ثابت في المستوي (الدليل) نسبة ثابتة تسمى بالاختلاف المركزي.

معادلة القطع الناقص :



من التعريف والرسم نجد أن $QF_1 + QF_2 = 2p$ ، حيث $F_1 \equiv (p, 0)$ ، $F_2 \equiv (-p, 0)$ ، $P \equiv (x, y)$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} + \sqrt{(x+p)^2 + y^2} = 2a \quad \text{إذن}$$

وبعد التخلص من الجذور نحصل على

$$(a^2 - p^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - p^2)$$

وبقسمة الطرفين على $a^2(a^2 - p^2)$ ، نجد أن

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - p^2} = 1$$

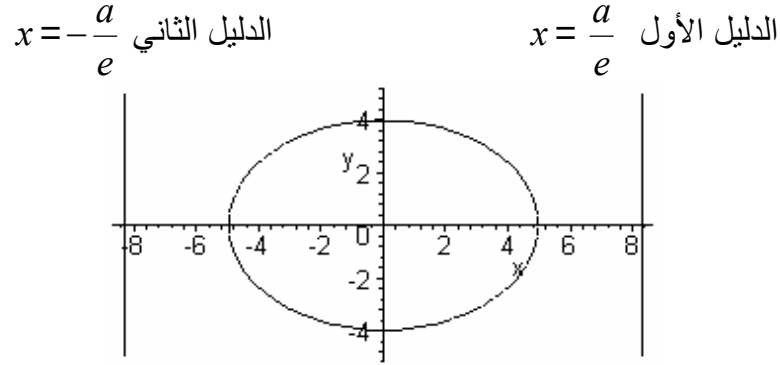
بوضع $p = ae$ حيث a هي نصف قطر المحور الأكبر ، e هي الاختلاف المركزي . إذن

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

وبوضع $b^2 = a^2(1-e^2)$. تصبح معادلة القطع الناقص على الصورة :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad (a > b)}$$

وتسمى هذه المعادلة بالصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص والذي مركزه نقطة الأصل وطولي محوريه الأكبر $2a$ ، والأصغر $2b$ ويأخذ الشكل التالي :



ملاحظة (3.4.10):

1. مركز القطع هي نقطة الأصل أي $(0,0)$.
2. طرفا المحور الأكبر $(-a,0)$, $(a,0)$.
3. معادلة محوره الأكبر $y = 0$.
4. طرفا المحور الأصغر $(0,-b)$, $(0,b)$.
5. معادلة محوره الأصغر $x = 0$.
6. إحداثي البؤرتين هما $F_1 = (p,0) = (ae,0)$; $F_2 = (-p,0) = (-ae,0)$.
7. معادلتا الدليلين هما $x = \frac{a}{e}$; $x = -\frac{a}{e}$.
8. ونجد أن $b^2 = a^2(1-e^2)$.

• بالمثل إذا كان محور القطع هو المحور الصادي فإن المعادلة تأخذ الصورة :

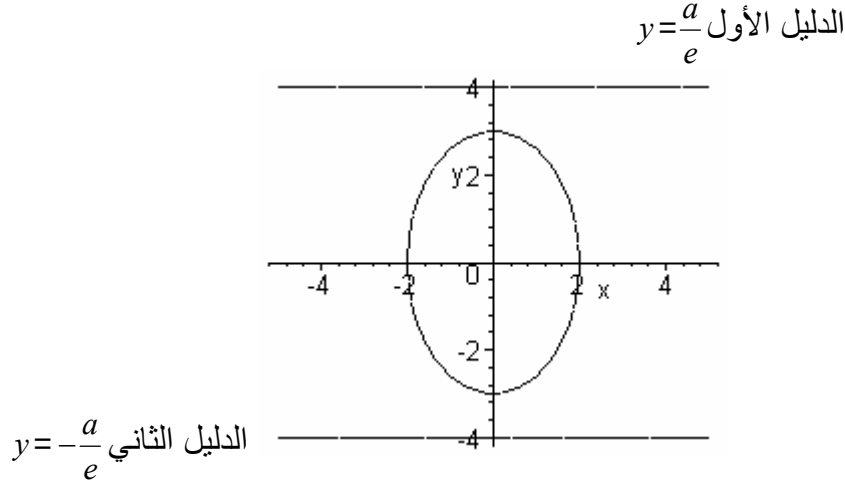
$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad ; \quad (a > b)}$$

ملاحظة (3.4.11):

1. مركز القطع نقطة الأصل أي $(0,0)$.
2. طرفا المحور الأكبر $(0,-a)$, $(0,a)$.
3. معادلة محوره الأكبر $x = 0$.
4. طرفا المحور الأصغر $(-b,0)$, $(b,0)$.
5. معادلة محوره الأصغر $y = 0$.
6. إحداثي البؤرتين هما $F_1 = (0,p) = (0,ae)$; $F_2 = (0,-p) = (0,-ae)$.
7. معادلتا الدليلين هما $y = \frac{a}{e}$; $y = -\frac{a}{e}$.

9. ونجد أن $b^2 = a^2(1-e^2)$

والشكل العام للقطع بهذه المواصفات يأخذ الصورة :



مثال (3.4.12) :

أوجد مركز وإحداثي البؤرتين ومعادلتَي الدليلان للقطع الناقص $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

الحل :

مركز القطع هو $(0,0)$. ولتعيين إحداثي بؤرتي القطع نجد أن

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5, \quad b^2 = 16 \Rightarrow b = 4, \quad (a > b)$$

للحصول على الاختلاف المركزي نجد أن :

$$b^2 = a^2(1-e^2) \Rightarrow 16 = 25(1-e^2) \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow e = \frac{3}{5} < 1$$

وعلى ذلك يكون إحداثي بؤرتي القطع هما

$$F_1 = (p, 0) = (ae, 0) = (5 \cdot \frac{3}{5}, 0) = (3, 0) ;$$

$$F_2 = (-p, 0) = (-ae, 0) = (-5 \cdot \frac{3}{5}, 0) = (-3, 0)$$

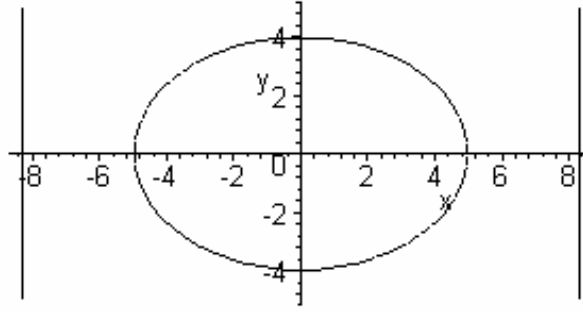
ومعادلتَي الدليلان هما :

$$x = \frac{a}{e} = \frac{5}{\frac{3}{5}} = \frac{25}{3} ; \quad x = -\frac{a}{e} = -\frac{5}{\frac{3}{5}} = -\frac{25}{3}$$

ورؤوس القطع هي : $(5,0)$, $(-5,0)$, $(0,4)$, $(0,-4)$

$$x = -\frac{25}{3} \text{ الدليل الثاني}$$

$$x = \frac{25}{3} \text{ الدليل الأول}$$



مثال (3. 4. 13) :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته $(-1, 3)$ ودليله $x - 1 = 0$ واختلافه المركزي

$$e = \frac{1}{3}$$

الحل :

من تعريف القطع الناقص (النسبة بين بعد أي نقطه $Q(x, y)$ على القطع من البؤرة إلى بعدها عن الدليل مقدار ثابت أقل من الواحد الصحيح ويعرف هذا المقدار بالاختلاف المركزي) .

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}}{\frac{|x-1|}{\sqrt{1+0}}} = \frac{1}{3}$$

وعليه فإن

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \frac{|x-1|}{3}$$

أي أن

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = \frac{x^2 - 2x + 1}{9}$$

وبترتيب الطرفين نجد أن

$$8x^2 + 20x + 9y^2 - 54y + 89 = 0$$

أي أن

معادلة القطع الناقص الناتجة من انتقال المفاور :

إذا كان مركز القطع هو النقطة (x', y') ومحور القطع موازياً للمحور السيني فإن معادلة القطع تأخذ الصورة :

$$\frac{(x - x')^2}{a^2} + \frac{(y - y')^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad (a > b)$$

المعادلة السابقة تمثل قطعاً ناقصاً له الخواص الآتية :

- (1) مركزه النقطة (x', y') .
- (2) طرفا المحور الأكبر $(-a + x', y')$, $(a + x', y')$.
- (3) معادلة محوره الأكبر $y = y'$.
- (4) طرفا المحور الأصغر $(x', -b + y')$, $(x', b + y')$.
- (5) معادلة محوره الأصغر $x = x'$.
- (6) إحداثي البؤرتين هما : $(-ae + x', y')$, $(ae + x', y')$.
- (7) معادلتا الدليلين هما : $x = x' \pm \frac{a}{e}$.

مثال (3.4.14) :

أوجد مركز القطع الناقص $5x^2 - 20x + 9y^2 - 18y - 16 = 0$ ، وأوجد أيضا أطوال محوريه الأكبر والأصغر وقيمة اختلافه المركزي وإحداثي بؤرتيه ومعادلتى الدليل .

الحل :

$$5x^2 - 20x + 9y^2 - 18y - 16 = 0$$

بما أن

$$5(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 2y) = 16$$

إذن

$$5(x^2 - 2x + 4)^2 + 9(y^2 - 2y + 1)^2 = 16 + 20 + 9$$

وعليه فإن

$$5(x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 45$$

أي أن

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{5} = 1$$

بقسمة الطرفين على 45 نحصل على :

وعليه فإن مركز القطع هو النقطة $(x', y') = (2, 1)$. ويكون $b^2 = 5$ ، $a^2 = 9$ ،

وعليه فإن $b = \sqrt{5}$ ، $a = 3$. ومن ثم يكون طول المحور الأكبر $2a = 6$ وطول

المحور الأصغر $2b = 2\sqrt{5}$.

لإيجاد الاختلاف المركزي نعلم أن : $b^2 = a^2(1 - e^2)$

ومنها $e^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ ، وبالتالي يكون قيمة الاختلاف المركزي $e = \frac{2}{3}$.

إحداثي البؤرتين

$$(x' + ae, y') = (2 + 3(\frac{2}{3}), 1) = (4, 1) ;$$

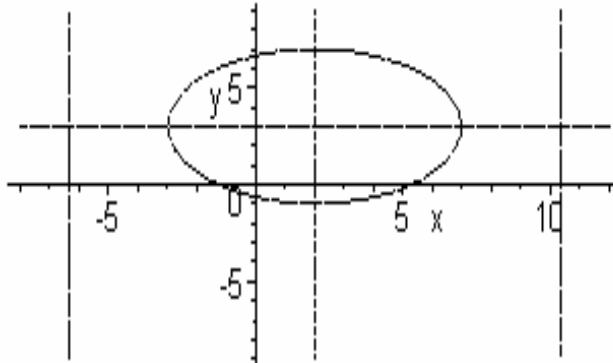
$$(x' - ae, y') = (2 - 3(\frac{2}{3}), 1) = (0, 1)$$

$$. x = 2 \pm \frac{9}{2} \Leftarrow x = x' \pm \frac{a}{e}$$

معادلتى الدليلين هما

$$x = -\frac{5}{2} , x = \frac{13}{2}$$

أي أن



الدليل الثاني $x = -\frac{5}{2}$

الدليل الأول $x = \frac{13}{2}$

مثال (3.4.15) :

أوجد مركز القطع الناقص $9x^2 + 4y^2 + 54x - 16y + 61 = 0$ ، وأوجد أيضا أطوال محوريه الأكبر والأصغر وقيمة اختلافه المركزي وإحداثي بؤرتيه ومعادلتى الدليل .

الحل :

بإكمال المربع للمعادلة المعطاه نجد أن

$$9(x + 3)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$$

بقسمة الطرفين على 36 نحصل على :

$$\frac{(x + 3)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

وعليه فإن مركز القطع هو النقطة $(x', y') = (-3, 2)$. ويكون $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ ، وعليه فإن $a = 3$, $b = 2$ ، ومن ثم يكون طول المحور الأكبر $2a = 6$ وطول المحور الأصغر $2b = 4$.

لإيجاد الاختلاف المركزي نعلم أن $b^2 = a^2(1 - e^2)$. إذن $e^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ ،

وبالتالي يكون قيمة الاختلاف المركزي $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

إحداثي البؤرتين هما

$$(x', y' + ae) = (-3, 2 + \sqrt{5}) ;$$

$$(x', y' - ae) = (-3, 2 - \sqrt{5})$$

معادلتى الدليلين هما

$$y = y' \pm \frac{a}{e} \Rightarrow y = 2 \pm \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

ثالثاً: القطع الزائد (The Hyperbola)

تعريفه (3.4.16):

يعرف القطع الزائد على أنه المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوى بحيث أن مجموع بعديهما عن نقطتين ثابتتين في المستوى F_1, F_2 (البؤرتان) يساوي مقدار ثابت $2a$ (طول المحور الأكبر للقطع).

ويمكن أيضا تعريف القطع الزائد تعريفاً مختلفاً عن التعريف السابق وذلك باستخدام الاختلاف المركزي e .

فإذا تحركت نقطة في مستو معلوم فإن النسبة بين بعدها عن نقطة ثابتة في هذا المستوى (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت في المستوى (الدليل) نسبة ثابتة تسمى بالاختلاف المركزي بحيث $e > 1$.

معادلة القطع الزائد :

لإيجاد معادلة القطع الزائد نأخذ محور السينات منطبقاً على الخط $\overrightarrow{F_1 F_2}$ والعمودي عليه من منتصف $\overline{F_1 F_2}$ محورا للصادات حيث البؤرتان هما $F_1 \equiv (p, 0)$, $F_2 \equiv (-p, 0)$ نوضح ذلك بالشكل التالي :

وبفرض $Q(x, y)$ نقطه من نقط القطع الزائد . إذن من التعريف نجد أن :

$$QF_1 - QF_2 = \pm 2a \quad ; \quad a > 0$$

حيث $2a$ هي طول المحور الأكبر للقطع .

وتكون الإشارة موجبه إذا كانت P قريبه من F_2 وسالبه إذا كانت قريبه من F_1 .

$$\therefore \sqrt{(x-p)^2 + y^2} - \sqrt{(x+p)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2 + y^2} \pm 2a$$

وبالتخلص من الجذر التربيعي في المعادلة نحصل على :

$$(p^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(p^2 - a^2)$$

وبقسمة الطرفين على $a^2(p^2 - a^2)$ نحصل على

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{p^2 - a^2} = 1$$

بوضع $p = ae$ إذن المعادلة تأخذ الصورة التالية :

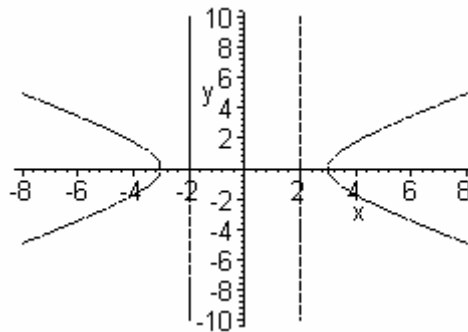
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$$

وبوضع $b^2 = a^2(e^2 - 1)$. تصبح معادلة القطع الزائد على الصورة :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad (a > b)}$$

وتسمى هذه المعادلة بالصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد .

$$x = -\frac{a}{e} \quad x = \frac{a}{e}$$



ونلاحظ أن :

(1) مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل (0,0) .

(2) الاختلاف المركزي $e > 1$ حيث $b^2 = a^2(e^2 - 1)$.

(3) احداثيات الرأس هي $(\pm a, 0)$.

(4) إحداثيات البؤرتين هما : $(\pm p, 0) = (\pm ae, 0)$.

(5) معادلتا الدليلين هما : $x = \pm \frac{a}{e}$.

(6) للقطع الزائد خطيين تقاربين وللحصول معادلتيهما نضع : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

وعليه فإن معادلتا الخطيين التقاربين هما : $y = \pm \frac{b}{a} x$.

(7) القطع الزائد $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ يسمى بالقطع الزائد المرافق للقطع الزائد

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. ويلاحظ أن المحور القاطع (المحور الحقيقي) للقطع $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ هو المحور الصادي ، والبؤرتان F_1, F_2 له يقعان على المحور الصادي.

مثال (3. 4. 17) :

أوجد مركز وإحداثي البؤرتين ومعادلتا الدليلين للقطع الزائد الذي معادلته هي

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

الحل :

مركز القطع هو $(0,0)$. ولتعيين إحداثي بؤرتي القطع نجد أن :

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 ; \quad b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

ويكون

$$e^2 = \frac{b^2}{a^2} + 1 = \frac{16}{25} + 1 = \frac{41}{25}$$

إذن

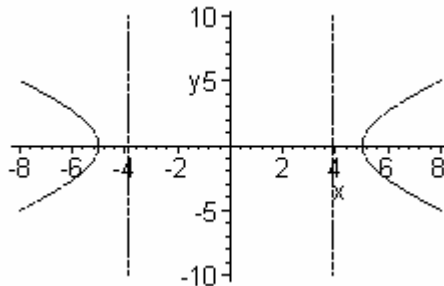
$$e = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

وعلى ذلك يكون إحداثي بؤرتي القطع هما :

$$(\pm p, 0) = (\pm ae, 0) = (\pm 5(\frac{\sqrt{41}}{5}), 0) = (\pm \sqrt{41}, 0)$$

ومعادلتا الدليلين هما : $x = \pm \frac{a}{e} = \pm 5(\frac{4}{\sqrt{41}}) = \pm \frac{25}{\sqrt{41}}$

ويمكن رسمه كما يلي



مثال (3. 4. 18) :

أوجد مركز وإحداثي البؤرتين ومعادلتَي الدليلين للقطع الزائد $9x^2 - 16y^2 = 144$.

الحل :

بقسمة طرفي المعادلة $9x^2 - 16y^2 = 144$ على العدد 144 نحصل على :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

وعليه فإن مركز القطع هو $(0,0)$. ولتعيين إحداثي بؤرتي القطع نجد أن :

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 ; \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

إذن

$$e^2 = \frac{b^2}{a^2} + 1 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}$$

$$e = \frac{5}{4}$$

وبالتالي

وعلى ذلك يكون إحداثي بؤرتي القطع هما :

$$(\pm p, 0) = (\pm ae, 0) = (\pm 4(\frac{5}{4}), 0) = (\pm 5, 0)$$

ومعادلتَي الدليلين هما :

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm 4\left(\frac{4}{5}\right) = \pm \frac{16}{5}$$

مثال (3.4.15) :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتا القطع الناقص $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ وبؤرتاه هما رأسا القطع الناقص الواقعتين على محوره الأكبر .

الحل :

بالنسبة للقطع الناقص $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ المعطى يكون :

$$a_1^2 = 16 \Rightarrow a_1 = 4 , \quad b_1^2 = 9 \Rightarrow b_1 = 3$$

إذن $e_1^2 = 1 - \frac{b_1^2}{a_1^2} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$ وبالتالي $e_1 = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ، وتكون بؤرتي القطع الناقص هما

$(\pm a_1 e_1, 0) = (\pm \sqrt{7}, 0)$ ، أي أن رأسي القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ المطلوب هما

$$(\pm \sqrt{7}, 0) . \quad \text{إذن } a = \sqrt{7} .$$

وحيث أن رأسي القطع الناقص هما $(\pm 4, 0)$ إذن بؤرتي القطع الزائد هما $(\pm 4, 0)$ ومنها

$$ae = 4 \quad \text{أي أن } e\sqrt{7} = 4 \quad \text{وينتج أن } e = 4/\sqrt{7} \quad \text{وبالتالي}$$

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) = 7\left(\frac{16}{7} - 1\right) = 7\left(\frac{9}{7}\right) = 9$$

ومنها يكون $b^2 = 9$ ، وعليه فإن معادلة القطع الزائد المطلوب هي $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$.

معادلة القطع الزائد الناتجة من انتقال المحاور :

الصورة العامة لمعادلة القطع الزائد بعد نقل نقطة الأصل للنقطة (x', y') هي :

$$\frac{(x - x')^2}{a^2} - \frac{(y - y')^2}{b^2} = 1$$

وهذه المعادلة تمثل قطعاً زائداً له الخواص الآتية :

- (1) مركزه النقطة (x', y') .
- (2) طرفا المحور القاطع $(x' + a, y')$, $(x' - a, y')$.
- (3) معادلة محوره القاطع $y = y'$.
- (4) طرفا المحور المرافق $(x', y' + b)$, $(x', y' - b)$.
- (5) معادلة محوره المرافق $x = x'$.
- (6) إحداثي البؤرتين هما : $(x' + ae, y')$, $(x' - ae, y')$.
- (7) معادلتا الدليلين هما : $x = x' \pm \frac{a}{e}$.
- (8) معادلتا الخطيين التقاربين هما : $y - y' = \pm \frac{b}{a} (x - x')$.

مثال (3.4.16) :

أوجد مركز القطع الزائد $9x^2 - 4y^2 + 54x + 8y + 41 = 0$ وأوجد أيضاً قيمة اختلافه

المركزي وإحداثي بؤرتيه ومعادلتا كل من الدليلين والخطيين التقاربين .

الحل : يمكن وضع معادلة القطع الزائد المعطى على الصورة

$$9(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 2) = -41 + 81 - 8$$

$$9(x + 3)^2 - 4(y + 1)^2 = 36 \quad \text{أي أن}$$

$$\frac{(x + 3)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{9} = 1 \quad \text{إذن}$$

وعليه فإن مركز القطع هو النقطة $(x', y') = (-3, -1)$ ، ويكون

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$e^2 = \frac{9}{4} + 1 \Rightarrow e^2 = \frac{13}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

وبالتالي فإن الرأسان هما :

$$(x' + a, y') = (-3 + 2, -1) = (-1, -1) ;$$

$$(x' - a, y') = (-3 - 2, -1) = (-5, -1)$$

وإحداثي البؤرتين هما :

$$(x' \pm ae, y') = (-3 \pm 2(\frac{\sqrt{13}}{2}), -1) = (-3 \pm \sqrt{13}, -1)$$

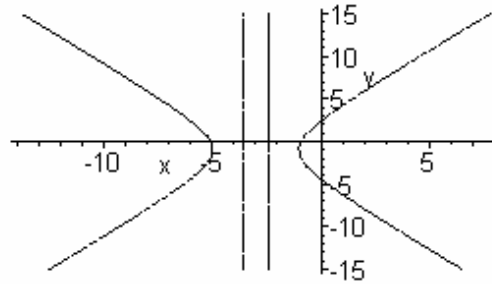
ومعادلتا الدليلين هما :

$$x = x' \pm \frac{a}{e} \Rightarrow x = -3 \pm 2\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \Rightarrow x = -3 \pm \frac{4}{\sqrt{13}}$$

ومعادلتا الخطيين التقاربين هما :
 $y + 1 = \pm \frac{4}{3}(x + 3)$
 $3y - 4x - 9 = 0$; $3y + 4x + 14 = 0$

أي أن

ويمكن رسم القطع كما يلي



مثال (3. 28) : أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرته $(-1, 3)$ ودليله $x - 1 = 0$ واختلافه المركزي $3/2$.

الحل : من تعريف القطع الزائد (النسبة بين بعد أي نقطة $P(x, y)$ على القطع من البؤرة إلى بعدها عن الدليل مقدار ثابت أكبر من الواحد الصحيح ويعرف هذا المقدار بالاختلاف المركزي) وعليه فإن

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}}{\frac{|x-1|}{\sqrt{1+0}}} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \frac{3|x-1|}{2} \quad \text{أي أن}$$

وبتربيع الطرفين

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = \frac{9x^2 - 18x + 9}{4}$$

وعليه فإن المعادلة المطلوبة هي : $5x^2 - 26x - 4y^2 + 24y - 31 = 0$