

المحاضرة (12)

بند 3 : معادلات الخط المستقيم في المستوى:

1. معادلة المستقيم الذى يوازي احد محورى الإحداثيات:

• المستقيم الذى يوازي محور الصادات و يقطع محور السينات في النقطة $C = (c, 0)$

$$x = c \quad \text{ومعادلته هي:}$$

• المستقيم الذى يوازي محور السينات و يقطع محور الصادات في النقطة $D = (0, d)$

$$y = d \quad \text{ومعادلته هي:}$$

و من ثم تكون معادلة محور الصادات هي $x = 0$ بينما معادلة محور السينات هي $y = 0$.

2. معادلة المستقيم الذى ميله يساوى m و يقطع محور الصادات في النقطة $(0, c)$ هي:

$$y = mx + c$$

إذا مر هذا الخط بنقطة الأصل فإن معادلته تصبح: $y = mx$

3. المستقيم الذى يتقاطع مع محور الإحداثيات في النقطتين $(0, b)$, $(a, 0)$ معادلته هي:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

4. معادلة المستقيم الذى ميله m و يمر بالنقطة (x_1, y_1) هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

5. معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين (x_1, y_1) , (x_2, y_2) هي:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نلاحظ أن معادلة هذا الخط المستقيم يمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

واضح أن هذه المعادلة من الدرجة الأولى في x , y ونلاحظ كذلك أن النقطتين

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) تحققان هذه المعادلة لتساوى صفين في المحدد.

ملاحظة (3.3.1): ننوه هنا إلى كيفية حل المحدد (أي إيجاد قيمته) فالمحدد 2×2 والذي يأخذ

الصورة $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ تكون قيمته هي : $ad - bc$. أما إذا كان المحدد 3×3 أي ثلاث صفوف

وثلاث أعمده فيكون علي الصورة $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ فيمكن إيجاد قيمته ببساطة كما يلي:

كرر العمودين الأول والثاني ثم اضرب الأقطار الثلاثية لأسفل يميناً بإشارة موجبة والأقطار الثلاثية لأعلي يميناً بإشارة سالبة كما هو موضح أدناه وجمع كل النتائج :

$$-a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

a_1	b_1	c_1	a_1	b_1
a_2	b_2	c_2	a_2	b_2
a_3	b_3	c_3	a_3	b_3

$$+a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3$$

فيكون

$$\Delta = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

6. معادلة المستقيم إذا كان طول العمود الساقط عليه من نقطة هو λ وكان هذا العمود يصنع

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \lambda$$

زاوية α مع محور السينات هي:

المعادلة التي على الصورة $Ax + By + C = 0$ حيث يكون احد المقدارين A, B على الأقل لا يساوى صفر، هي معادلة جبرية من الدرجة الأولى في x, y . أما المعادلة الجبرية من الدرجة الثانية فهي كل معادلة على الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث يكون أحد المقادير A, B, C على الأقل غير مساو الصفر.

على وجه العموم فإن الخط المستقيم يُمثل بمعادلة من الدرجة الأولى في x, y على الصورة $Ax + By + C = 0$ حيث A, B, C ثوابت.

ملاحظة (3.3.2):

يمكن تحويل المعادلة العامة للخط المستقيم إلى أي صورة من الصور السابقة والعكس بالعكس.

7. الزاوية المحصورة بين المستقيمين $y = m_1x + c_1$ ، $y = m_2x + c_2$ تعطى بالعلاقة :

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

ملاحظات (3.3.3):

(a) إذا كانت الكمية $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ موجبة تكون الزاوية θ المحصورة بين المستقيمين هي الزاوية

الحادة ، وأما إذا كانت الكمية سالبة فإن الزاوية θ تصبح في هذه الحالة الزاوية المنفرجة بينهما.

(b) يتوازي المستقيمان إذا كان $m_1 = m_2$

(c) يتعامد المستقيمان إذا كان $m_1 m_2 = -1$

8. طول العمود الساقط من النقطة (x_1, y_1) على الخط المستقيم $Ax + By + C = 0$ هو :

$$\left| \frac{A x_1 + B y_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

9. معادلتا منصفى الزوايا للخطين المستقيمين

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 , A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

تعطى كالآتي:

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

مثال (3.3.4) :

(1) المعادلة $y^2 - 3xy + 2x^2 = 0$ التي يمكن كتابتها على الصورة $(y - x)(y - 2x) = 0$

تمثل الخطين المستقيمين $y = x$, $y = 2x$ ويمر كل منهما بنقطة الأصل.

(2) المعادلة $xy = 0$ تمثل الخطين المستقيمين $x = 0$, $y = 0$ أي أنها تمثل محوري الإحداثيات.

بند 4 : القطوع المخروطية

قبل البدء في تعريف القطوع المخروطية نناقش المعادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين x, y .

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في متغيرين x, y تأخذ الصورة :

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

حيث a, b, c, f, g, h ثوابت حقيقية .

لتصنيف هذه المعادلة يجب حساب قيمة **مميز المعادلة** من المحدد التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{vmatrix}$$

ونلاحظ ما يلي :

(1) إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تمثل خطين مستقيمين.

(2) إذا كان $\Delta \neq 0$ فالمعادلة تمثل :

$$(أ) \text{ دائرة إذا تحقق أن } a = b, h = 0, f^2 + g^2 > c^2$$

(ب) قطع مخروطي :

• قطع مكافئ إذا كان $h^2 = ab$

• قطع ناقص إذا كان $h^2 < ab$

• قطع زائد إذا كان $h^2 > ab$

مثال (3. 4. 1) :

المعادلة : $3x^2 - 2xy - y^2 + 4x - 8y - 7 = 0$ تمثل خطين مستقيمين.

المعادلة : $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ تمثل دائرة.

المعادلة : $x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$ تمثل قطع ناقص.

المعادلة : $x^2 - 4x - y + 5 = 0$ تمثل قطع مكافئ.

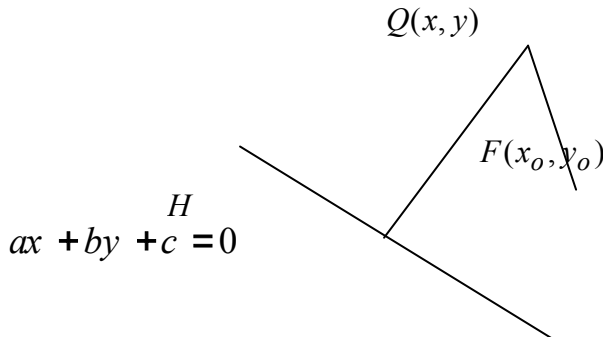
المعادلة : $x^2 - y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$ تمثل قطع زائد.

علي الطالب التحقق من ذلك بحساب المحدد Δ في كل مرة.

القطع المخروطي :

هو المحل الهندسي لنقطة $P(x, y)$ تتحرك في المستوي بحيث يكون نسبة بعدها عن نقطة ثابتة في المستوي (تسمى البؤرة - Focus) إلى بعدها عن مستقيم ثابت في نفس المستوي (يسمى الدليل - Directrix) يساوي مقداراً ثابتاً (يسمى بالاختلاف المركزي - Eccentricity).

فإذا فرضنا أن النقطة الثابتة هي $F(x_o, y_o)$ ومعادلة الدليل هي $ax + by + c = 0$ والنقطة المتحركة هي $Q(x, y)$ ونقطة تلاقي مسقط النقطة $Q(x, y)$ على الدليل هي H . من الشكل التالي :



نجد أن $e = \frac{QF}{QH}$ حيث e ترمز للاختلاف المركزي . إذن $QF = e \cdot QH$ وبالتالي

فإن :

$$\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} = e \cdot \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

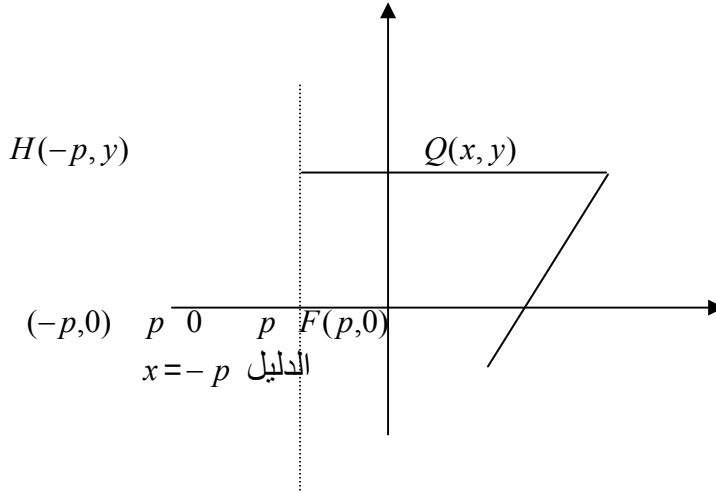
مع ملاحظة أنه يمكن تبسيط المعادلة السابقة لنحصل علي معادلة من الدرجة الثانية والتي تمثل قطعاً مخروطياً.

وُصنف القطوع من المعادلة السابقة طبقاً لقيمة الاختلاف المركزي فنجد أنه :

- في حالة $e = 1$ فإن المعادلة تمثل قطع مكافئ
- في حالة $e < 1$ فإن المعادلة تمثل قطع ناقص
- في حالة $e > 1$ فإن المعادلة تمثل قطع زائد

أولاً: القطع المكافئ (The Parabola)

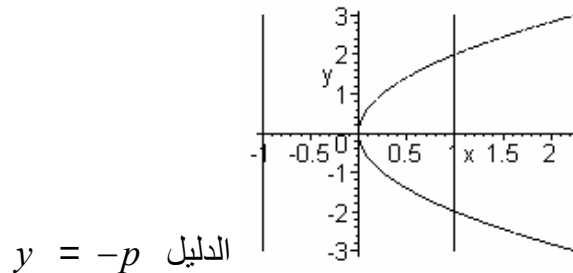
يعرف القطع المكافئ على أنه مجموعة النقاط في المستوي والتي بُعد كل منها عن نقطة ثابتة في المستوي يساوي بُعدها عن مستقيم ثابت. النقطة الثابتة تسمى البؤرة والمستقيم الثابت يسمى بالدليل. فإذا كان محور القطع هو محور السينات ورأس القطع هي نقطة الأصل من الشكل التالي نجد أن :



النقطة الثابتة (البؤرة) هي $F(p,0)$ ومعادلة الدليل هي $x = -p$ ، وعليه فإن $QF = QH$ إذن

$$\begin{aligned} (x - p)^2 + (y - 0)^2 &= (x + p)^2 + (y - y)^2 \\ x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2 + 0 \\ y^2 &= 4px \quad ; \quad (p > 0) \end{aligned}$$

أي أن
إذن
وهذه هي الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ . وشكل القطع يأخذ الصورة :



ونجد أن محور القطع هو المحور السيني ومنحني القطع متماثل حول المحور السيني ومُمثل بالمعادلتين $y = \pm 2\sqrt{p}\sqrt{x}$.

الوتر البؤري العمودي :

أي قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين علي القطع تسمى وتر للقطع وأي وتر يمر بالبؤرة يسمى وتر بؤري والوتر البؤري المتعامد مع محور القطع يسمى بالوتر البؤري العمودي ويمكن بسهولة حساب طوله وهو يساوي $4p$ ومعادلته هي $x = p$.

ملاحظات (2.4.3) : المعادلة $y^2 = 4px$ (حيث $p > 0$) تمثل قطع مكافئ له العناصر التالية :

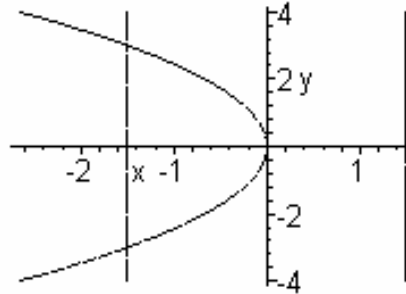
1. رأس القطع هي النقطة $(0,0)$.
2. إحداثي البؤرة $F(p,0)$.
3. معادلة الدليل هي $x = -p$ أو $x + p = 0$.
4. طول الوتر العمودي المار بالبؤرة F وعمودي على محور التماثل يساوي $4p$ ومعادلته هي $x = p$.
5. محور الصادات مماس للقطع عند الرأس .
6. لا توجد أي نقط حقيقية للقطع على يسار محور الصادات .
7. القطع متماثل بالنسبة لمحور السينات .
8. منحني القطع امتداده غير محدود في الربعين الأول والرابع والمنحني مفتوح لليمين.

الأشكال الأخرى للقطع المكافئ :

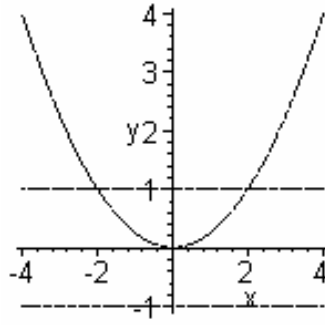
يوجد صور قياسية مختلفة بناء على موضع القطع بالنسبة للمحاور وسوف نوضح هذه الصور المختلفة وأيضا معادلات هذه الصور المختلفة .
(i) إذا كانت هي $F(-p,0)$ أي على الجهة اليسرى للمحور السيني ومعادلة الدليل هي $x = p$ فإن المعادلة تأخذ الصورة :

$$y^2 = -4px \quad ; \quad (p > 0)$$

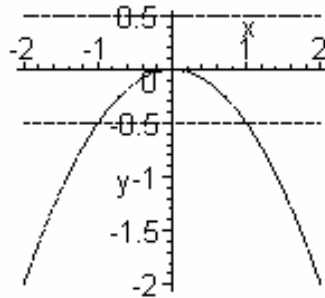
وهي تمثل قطع مكافئ محوره المحور السيني ورأسه نقطة الأصل ومنحني القطع متماثلا حول المحور السيني لجهة اليسار وشكل القطع يأخذ الصورة :



(ii) معادلة القطع المكافئ الذي محوره المحور الصادي ورأسه هي نقطة الأصل وبؤرته $(0,p)$ ومعادلة دليله $y = -p$ هي $x^2 = 4py$; $(p > 0)$ وشكل القطع يأخذ الصورة :



نلاحظ أن منحنى القطع متماثل حول المحور الصادي لأعلي.
(iii) معادلة القطع المكافئ الذي محوره المحور الصادي ورأسه هي نقطة الأصل وبؤرته $(0, -p)$ ومعادلة دليله $y = p$ هي $x^2 = -4py$; $(p > 0)$ وشكل القطع يأخذ الصورة :



ونلاحظ أن منحنى القطع متماثل حول المحور الصادي لأسفل.
مثال (3.4.3) : حدد عناصر كل من القطوع التالية :

(i) $y^2 = -6x$ (ii) $x^2 = 4y$ (iii) $y^2 = 3x$ (iv) $x^2 + 2y = 0$

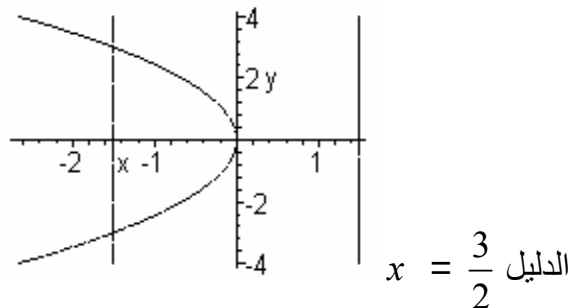
الحل :

(i) القطع $y^2 = -6x$ متماثل حول المحور السيني ورأسه هي نقطة الأصل ومنحنى القطع يتجه إلى الجهة اليسرى وفيما يلي نوجد بؤرته ودليله .

نقارن المعادلة $y^2 = -6x$ بالمعادلة $y^2 = -4px$ فنجد أن $4p = 6$ وعليه فإن

$p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. إذن البؤرة هي $F = (-p, 0) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ومعادلة الدليل هي $x = p$ ،

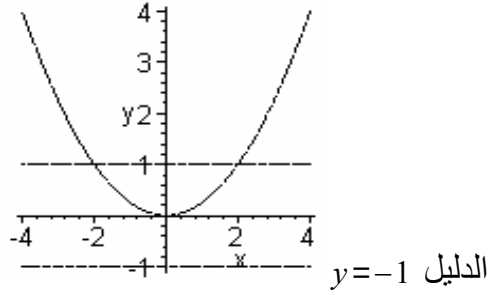
أي أن $x = \frac{3}{2}$. ومنحنى القطع يأخذ الصورة :



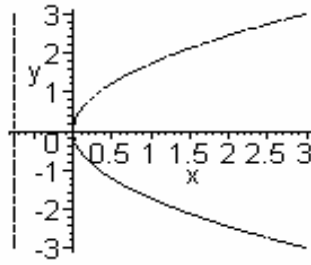
(ii) القطع $x^2 = 4y$ متماثل حول المحور الصادي ورأسه هي نقطة الأصل ومنحنى القطع يتجه إلى الجهة الأعلى وفيما يلي نوجد بؤرته ودليله .

نقارن المعادلة $x^2 = 4y$ بالمعادلة $x^2 = 4py$ فنجد أن $4p = 4$ وعليه فإن $p = 1$.

إذن البؤرة هي $F = (0, p) = (0, 1)$ ومعادلة الدليل هي $y = -p$ أي أن $y = -1$.
ومنحنى القطع يأخذ الصورة :

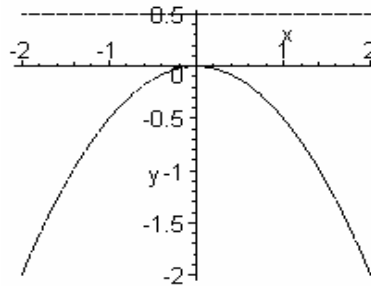


(iii) القطع $y^2 = 3x$ متماثل حول المحور السيني ورأسه هي نقطة الأصل ومنحنى القطع يتجه إلى الجهة اليمنى للمحور السيني وفيما يلي نوجد بؤرته ودليله .
نقارن المعادلة $y^2 = 3x$ بالمعادلة $y^2 = 4px$ فنجد أن $4p = 3$ وعليه فإن $p = \frac{3}{4}$. إذن البؤرة هي $F = (p, 0) = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ ومعادلة الدليل هي $x = -p$ أي أن $x = -\frac{3}{4}$.



(iv) معادلة القطع $x^2 + 2y = 0$ يمكن وضعها على الصورة : $x^2 = -2y$ وهو قطع مكافئ ومنحنى القطع متماثل حول المحور الصادي لأسفل ومركزه نقطة الأصل . ولإيجاد بؤرته ومعادلة دليله نضع $4p = 2$ إذن $p = \frac{1}{2}$. إذن البؤرة هي :

$$F = (-p, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ ومعادلة الدليل هي : } y = p \text{ أي أن } y = \frac{1}{2} .$$



معادلة القطع المكافئ عندما يكون محوره موازي لأحد محوري الإحداثيات :

ندرس أولاً معادلة القطع المكافئ إذا كان محوره يوازي المحور السيني ومنحني القطع في الاتجاه الموجب للمحور السيني ورأس القطع هي النقطة (x', y') . الصورة العامة لمعادلة هذا القطع هي :

$$(y - y')^2 = 4p(x - x')$$

حيث أن الرأس هي النقطة (x', y') . والبؤرة هي النقطة $F = (p + x', y')$ ومعادلة الدليل هي : $x = -p + x'$.

الجدول التالي يوضح معادلات القواطع المختلفة في الصورة العامة :

معادلة القطع	الرأس	البؤرة	معادلة الدليل
$(y - y')^2 = 4p(x - x')$	(x', y')	$F(p + x', y')$	$x = -p + x'$
$(y - y')^2 = -4p(x - x')$	(x', y')	$F(-p + x', y')$	$x = p + x'$
$(x - x')^2 = 4p(y - y')$	(x', y')	$F(x', p + y')$	$y = -p + y'$
$(x - x')^2 = -4p(y - y')$	(x', y')	$F(x', -p + y')$	$y = p + y'$

مثال (3. 4. 4) : أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة وطول الوتر البؤري العمودي للقطع المكافئ

$$x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$$

الحل :

بما أن $x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$ ، إذن $x^2 - 4x = -8y - 12$. بإكمال المربع يكون

$$(x - 2)^2 = -8y - 12 + 4 \quad \text{أي أن} \quad (x - 2)^2 = -8(y + 1)$$

بمقارنة هذه المعادلة بالصورة $(x - x')^2 = -4p(y - y')$ يكون الرأس هو $(2, -1)$

وطول الوتر البؤري العمودي هو $4p = 8$ إذن $p = 2$ وإحداثيات البؤرة هي :

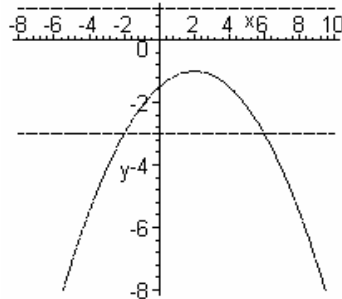
$$F \equiv (x', y' - p) = (2, -1 - 2) = (2, -3)$$

ومعادلة الدليل هي :

$$y = y' + p = -1 + 2 = 1$$

ومعادلة الوتر البؤري العمودي :

$$y = y' - p = -1 - 2 = -3$$



مثال (3. 4. 5) :

أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة وطول الوتر البؤري العمودي للقطع المكافئ :

$$y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$$

الحل :

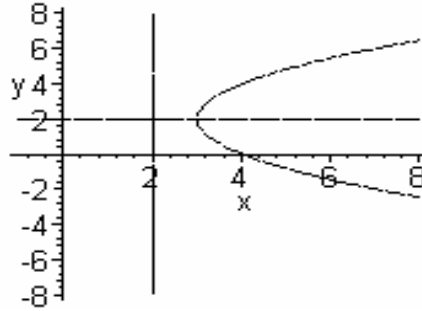
بما أن $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$ إذن $y^2 - 4y = 4x - 16$. بإكمال المربع فإن $(y - 2)^2 = 4x - 16 + 4$ أي أن $(y - 2)^2 = 4(x - 3)$.

وبمقارنة هذه المعادلة بالصورة $(y - y')^2 = 4p(x - x')$ يكون الرأس هو $(3, 2)$ وطول الوتر البؤري العمودي هو $4p = 4$ إذن $p = 1$ وإحداثيات البؤرة هي :

$$F \equiv (x' + p, y') = (3 + 1, 2) = (4, 2)$$

معادلة الدليل هي : $x = -p + x' = -1 + 3 = 2$

معادلة الوتر البؤري العمودي : $x = x' + p = 1 + 3 = 4$



مثال (3. 4. 6) :

أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة وطول الوتر البؤري العمودي للقطع المكافئ :

$$4y^2 - 6x - 4y = 5$$

الحل : يمكن وضع المعادلة المعطاه علي الصورة $4(y^2 - y) = 6x + 5$

$$4\left(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 6x + 5 \quad \text{إذن}$$

وبالتالي

$$4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 6x + 5$$

أي أن

$$(y - (1/2))^2 = (3/2) (x + 1)$$

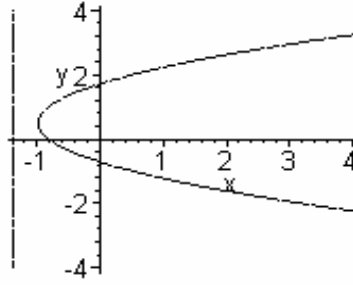
وبمقارنة هذه المعادلة بالصورة $(y - y')^2 = 4p(x - x')$ يكون الرأس هو $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

وطول الوتر البؤري العمودي هو $4p = \frac{3}{2}$ إذن $p = \frac{3}{8}$ وإحداثيات البؤرة هي :

$$F \equiv (x' + p, y') = \left(\frac{3}{8} - 1, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right)$$

معادلة الدليل هي : $x = -p + x' = -\frac{3}{8} - 1 = -\frac{11}{8}$

معادلة الوتر البؤري العمودي : $x = x' + p = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$



ملاحظة (3.4.7):

(1) المعادلة $x = \ell y^2 + ky + c$ ($\ell \neq 0$) تمثل دائماً قطعاً مكافئاً محوره يوازي محور السينات.

(2) المعادلة $y = \ell x^2 + kx + c$ ($\ell \neq 0$) تمثل دائماً قطعاً مكافئاً محوره يوازي المحور الصادي.

مثال (3.4.8):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة (2,2) ودليله المستقيم $3x + 2y - 6 = 0$.

الحل:

نفرض $P(x, y)$ هي النقطة المتحركة من تعريف القطع نجد أن:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \frac{3x + 2y - 6}{\sqrt{9+4}}$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{3x + 2y - 6}{\sqrt{13}} \right)^2 \quad \text{وعليه فإن}$$

$$13(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4) = 9x^2 + 12x + 36 \quad \text{وعليه فإن}$$

إذن

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy - 16x - 28y + 68 = 0$$

مثال (3.4.9):

أثبت أن المعادلة $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x + 2y + 8 = 0$ تمثل قطع مكافئ.

الحل:

تحقق من أن مميز المعادلة المعطاة هو

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

وأن $h^2 = ab = 4$. إذن المعادلة $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x + 2y + 8 = 0$ تمثل قطعاً مكافئاً.