

المخاضرة (11)

المهندسة المستوية

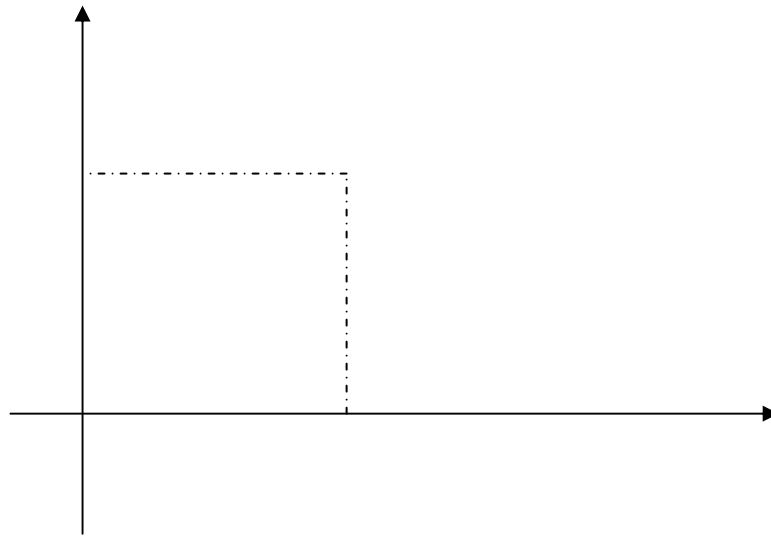
بند 1 : الإحداثيات الكارتيزية والقطبية

(Cartesian and Polar Coordinates)

النظام الذى يكفل لنا طريقة لتعيين مواقع النقط المختلفة فى المستوى يسمى نظام إحداثيات وأبسط هذه النظم هو نظام الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة ويتحدد هذا النظام باختيار محورين متعامدين ووحدة خطية لقياس الأطوال. نقطة تقاطع المحورين تسمى نقطة الأصل ونرمز لها بالرمز O كما يسمى المحوران المتعامدان بمحورى الإحداثيات. عادة يؤخذ هذان المحوران بحيث يكون المحور الأول أفقى وبالتالى يكون الثانى رأسى (يطلق عليهما أحيانا المحور الأفقى والمحور الرأسى). المحور الأفقى يسمى محور السينات أو محور X ويوضح الحرف X بحيث يشير الاتجاه OX إلى الاتجاه الموجب - كما يسمى المحور الرأسى بمحور الصادات أو محور Y ويوضح الحرف Y بحيث يشير الاتجاه OY إلى الاتجاه الموجب لهذا المحور. نفرض أن M نقطة اختيارية فى المستوى، نسقط من النقطة M عمودين (موازيين لمحوري الإحداثيات) بحيث يقابلا محوري الإحداثيات OY ، OX فى النقطتين M_x ، M_y على الترتيب. العددين x ، y اللذان يعبران عن الطولين OM_x ، OM_y بوحدات القياس المختارة بإحداثى النقطة M أى أن :

$$x = OM_x \text{ , } y = OM_y$$

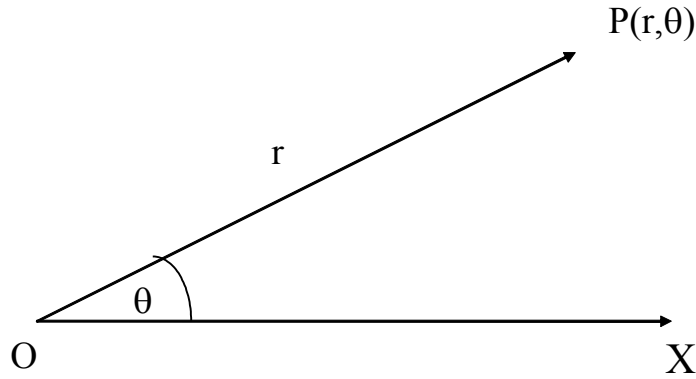
كما هو موضح بالشكل



كما يسمى x بالإحداثي الأول أو الإحداثي الأفقي أو الإحداثي السيني ويسمى y بالإحداثي الثاني أو الإحداثي الرأسى أو الإحداثي الصادي ولكي نوضح موقع النقطة تماماً في المستوى نكتب $M = M(x, y)$. وبصورة عامة عندما نكتب $M(a, b)$ نعى أن للنقطة M إحداثياً أفقياً $x = a$ وإحداثياً رأسياً $y = b$.

مما لاشك فيه أن نظام الإحداثيات الكارتيزية هو أكثر الأنظمة شيوعاً ، ولكنه ليس دائماً الاختيار الأمثل لحل بعض التمارين فيوجد نظام آخر يسمى نظام الاحداثيات القطبية.

يتعمد نظام الإحداثيات القطبية بتحديد نقطة ثابتة ما في المستوى نرمز لها بالرمز O وتسمى نقطة أصل أو قطب وتحدد شعاع ثابت OX صادر من هذه النقطة يسمى الخط الابتدائي أو المحور القطبي كما يلزم بتحديد وحدة لقياس الأطوال كذلك (نفرض أن جزءاً مقتطعاً على المحور القطبي OX تمثل وحدة الطول).

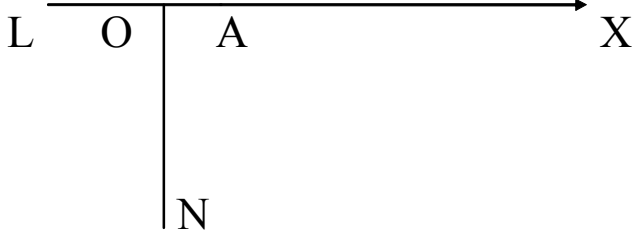


نأخذ نقطة أخرى P في المستوى ونصل OP . موضع النقطة P يتحدد بسهولة إذا علمنا الزاوية $X\hat{O}P$ والطول OP .

سوف نتفق على أن الزاوية $X\hat{O}P$ تكون موجبة إذا قيست من الخط الابتدائي OX في اتجاه ضد اتجاه عقارب الساعة وتكون سالبة إذا قيست من الخط الابتدائي في اتجاه مع اتجاه عقارب الساعة.

سوف نرمز للقيمة المطلقة للمسافة OP بالرمز r أي أن $r = |OP|$. كذلك سنرمز بالرمز θ للزاوية $X\hat{O}P$ أي أن $\theta = X\hat{O}P$. الوحدات الشائعة الاستخدام لقياس الزوايا بالدرجات يعرف بالتقدير الستيني والقياس بالزوايا النصف قطرية يعرف بالتقدير الدائري . يسمى العددين θ و r بالإحداثيين القطبيين للنقطة P ، ونكتب $P = P(r, \theta)$ حيث r هي البعد القطبي، θ هي مقياس الزاوية القطبية.

مثال (1. 1. 3):



من الملاحظ على الرسم أن الإحداثيان

يحددان النقطة $r = 3, \theta = -\pi/2$

N. أما الإحداثيان القطبيين

$(3, 3\pi/2)$ فيعنيان نفس النقطة N

أيضاً ، بينما الإحداثيان القطبيين

$(1, 0)$ و $(1, 2\pi)$ وكذلك $(1, -2\pi)$... وهلم جرا فيعنيان النقطة A.

ملاحظة (2. 1. 3):

من هذا المثال نستنتج أن أي زوج من القيم (r, θ) يُعطى (يُمثل) نقطة واحدة فقط في المستوى

ولكن النقطة الواحدة نفسها P تُعطى (تُمثل) بمجموعة لانهائية من قيم مقياس الزاوية القطبية

وتختلف قيم هذه الزاوية الواحدة عن الأخرى بعدد يكون أحد مضاعفات العدد 2π (قارن مع

المثال السابق). وإذا انطبقت النقطة P على القطب، فإن قيمة الزاوية القطبية تبقى اختيارية دائماً.

مثال (3. 1. 3):

في المثال السابق النقطة N تناظر الإحداثيين القطبيين $(3, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، وتناظر

النقطة A الإحداثيين القطبيين $(1, \pi + 2k\pi)$.

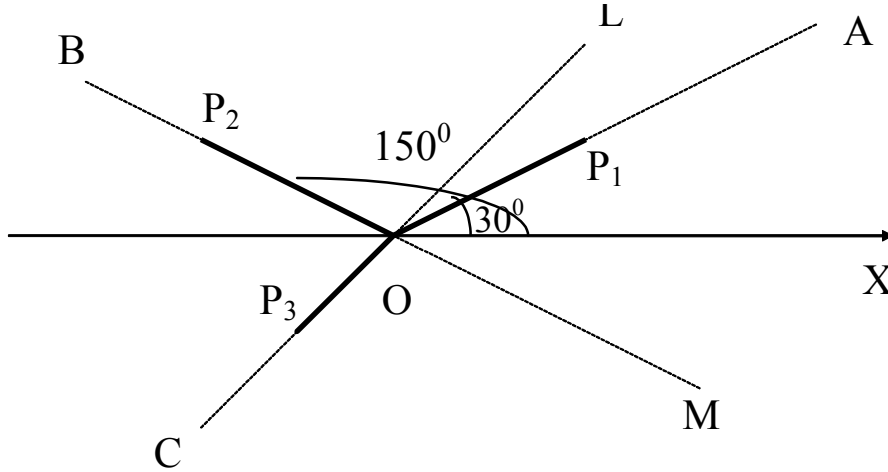
مثال (4. 1. 3):

عين مواضع النقط

- (i) $(2, 30^\circ)$ (ii) $(3, 150^\circ)$ (iii) $(2, -135^\circ)$

الحل:

لتعيين موضع النقطة الأولى $(2, 30^\circ)$ ، نلاحظ أنه يناظر زاوية القطب $\theta = 30^\circ$ "المرسومة من



الخط الابتدائي OX

كما هو مبين بالشكل

الشعاع OA ثم

نقيس عليه مسافة

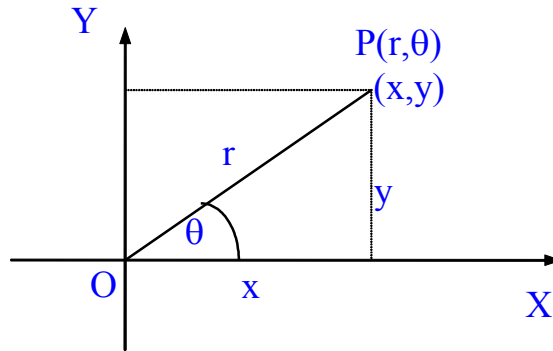
وحدتين ، نحصل

بذلك على النقطة P_1

- لتعيين النقطة الثانية $(3, 150^\circ)$ نعتبر زاوية القطب $\theta = 150^\circ$ يناظر هذا الاتجاه الشعاع OB ، نقيس عليه مسافة ثلاث وحدات مبتدئاً من القطب ومن ثم نحصل على النقطة P_2 .
- لتحديد موضع النقطة الثالثة $(2, -135^\circ)$ ، يناظر زاوية القطب $\theta = -135^\circ$ المرسومة من الخط القطبي OX والشعاع OC في الاتجاه السالب، ثم نقيس عليه مسافة وحدتين ابتداءً من القطب O فنحصل على النقطة P_3 .

العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الكارتيزية:

يلزم في بعض الحالات استخدام نظامي الإحداثيات القطبية والكارتيزية في نفس الوقت لذلك لزم أن نعرف كيفية التحويل من أحد النظامين إلى النظام الآخر.



بفرض أن نقطة أصل الإحداثيات الكارتيزية O هي في نفس الوقت قطب الإحداثيات القطبية (أي أننا نأخذ نقطة الأصل مشتركة لكلا الإحداثيين) ونختار الخط الابتدائي OX للإحداثيات القطبية منطبقاً مع الاتجاه الموجب للمحور X. نفرض أن النقطة P هي نقطة اختيارية في المستوى، وأن x, y إحداثياتها في المجموعة المتعامدة، وأن r, θ إحداثياتها القطبية. عندئذ يكون

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

وبذلك يمكن تحديد الإحداثيات (x, y) إذا كان لدينا (r, θ) ، أيضاً إذا أردنا إيجاد العلاقة العكسية أي نوجد الإحداثيات القطبية (r, θ) إذا علمنا الإحداثيات الكارتيزية (x, y) لنقطة P (مثلاً نجد أن

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \text{ when } x \neq 0 \quad , \quad \dots (2)$$

في حالة $x = 0$ فإن قيمة الزاوية θ تكون إما $\pi/2$ أو $3\pi/2$ وفقاً لإشارة الإحداثي الصادي للنقطة P ما إذا كان موجباً أو سالباً على الترتيب.

مثال (3. 1. 5): أوجد الإحداثيات القطبية للنقط التي إحداثياتها الكارتيزية هي: $P(0,4)$, $Q(2,-2)$.

الحل: من العلاقة (2) نعلم أن

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} , \quad \tan \theta = \frac{y}{x} ; \quad \text{when } x \neq 0$$

بالنسبة للنقطة الأولى $P(0,4)$:

$$r = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4 , \quad \theta = \pi/2 \text{ or } 3\pi/2$$

حيث أن الإحداثي الصادي للنقطة موجب الإشارة إذن $\theta = \pi/2$.

بالنسبة للنقطة الثانية $Q(2,-2)$:

$$r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} , \quad \tan \theta = -1$$

من ذلك نلاحظ أن θ تساوي $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، أو θ تساوي $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح. وبما أن النقطة الثانية تقع في الربع الرابع فإن العلاقة الأولى وحدها هي الصحيحة ، ومن ثم تكون قيمة زاوية القطب الرئيسية لـ θ هي $-\frac{\pi}{4}$.

مثال (3. 1. 6):

أوجد الإحداثيات الكارتيزية للنقطة التي إحداثياتها القطبية هي $L(5, \pi/4)$, $M(6, 135^\circ)$.

الحل:

$$x = r \cos \theta , \quad y = r \sin \theta \quad \text{نعلم أن}$$

بالنسبة للنقطة $L(5, \pi/4)$ يكون:

$$x = r \cos \theta = 5 \cos(\pi/4) = \frac{5}{\sqrt{2}} , \quad y = r \sin \theta = 5 \sin(\pi/4) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

إذن تمثل النقطة L كارتيزياً بـ $(5/\sqrt{2}, 5/\sqrt{2})$.

بالنسبة للنقطة $M(6, 135^\circ)$ يكون:

$$x = r \cos \theta = 6 \cos(3\pi/4) = -\frac{6}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2} ,$$

$$y = r \sin \theta = 6 \sin(3\pi/4) = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

إذن تمثل النقطة M كارتيزياً بـ $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$.

مثال (3. 1. 7):

عبر بالإحداثيات الكارتيزية عن كل من المعادلات المعطاة في الصورة التالية (حيث a ثابت):

$$(i) \quad r = a \sin \theta$$

$$(ii) \quad \sqrt{r} = \sqrt{a} \cos(\theta/2)$$

(i) حيث أن $r = a \sin \theta$ إذن بضرب هذه المعادلة في r نحصل على

$$r^2 = ar \sin \theta$$

ومن ثم باستخدام المعادلة (1) نحصل على

$$x^2 + y^2 = ay$$

(ii) حيث أن

$$\sqrt{r} = \sqrt{a} \cos(\theta/2)$$

إذن بالتربيع نحصل على

$$r = a \cos^2(\theta/2) = (a/2)(1 + \cos \theta)$$

ومن ثم بالضرب في $2r$ نحصل على

$$2r^2 = ar + ar \cos \theta$$

إذن باستخدام المعادلة (1) نجد أن

$$2(x^2 + y^2) = a\sqrt{x^2 + y^2} + ax$$

أي أن

$$(2x^2 + 2y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

مثال (8.1.3):

عبر عن كل من المعادلات الآتية باستخدام الإحداثيات القطبية:

$$(i) \quad x^2 + y^2 = 9 \quad (ii) \quad x = 7 \quad (iii) \quad (x^2 + y^2)^2 = 16(x^2 - y^2)$$

الحل:

نعلم أن $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ ، وبالتالي نجد أن

$$(i) \quad \text{المعادلة } x^2 + y^2 = 9 \text{ نستطيع أن نعبر عنها بـ } r^2 = 9.$$

$$(ii) \quad \text{المعادلة } x = 7 \text{ تتحول إلى } r \cos \theta = 7.$$

$$(iii) \quad \text{المعادلة } (x^2 + y^2)^2 = 16(x^2 - y^2) \text{ تتحول إلى}$$

$$r^4 = 16(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)$$

وبالتالي

$$r^2 = 16(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

أي أن

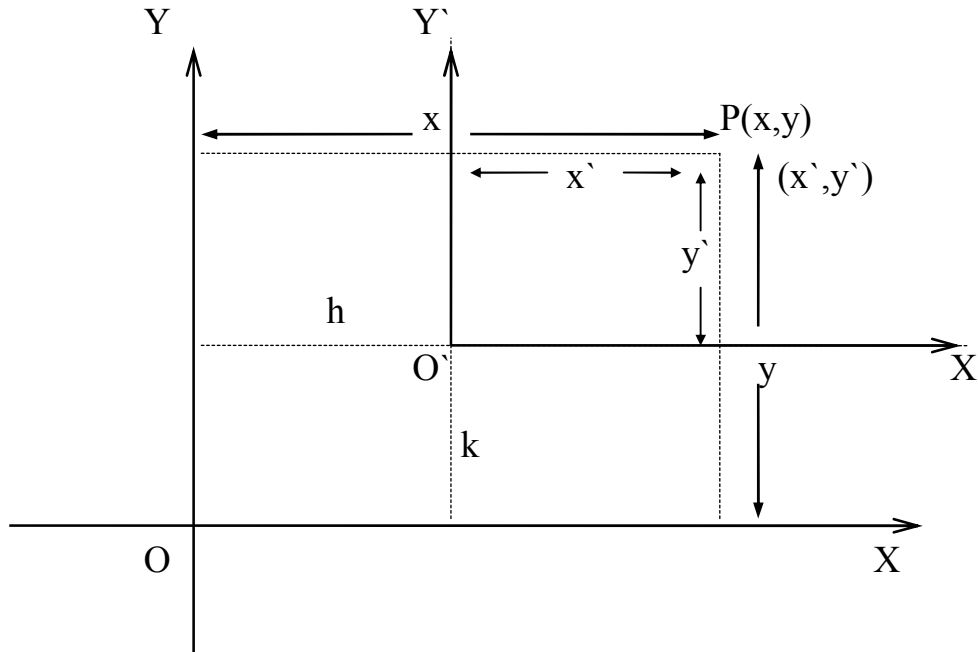
$$r^2 = 16 \cos 2\theta$$

بند 2 : نقل ودوران المحاور:

نحتاج أحياناً في تمرينات الهندسة التحليلية لعملية تغيير محاور الإحداثيات إلى محاور جديدة تكون مناسبة لتبسيط حل التمارين. وعند استخدام المحاور الجديدة تتغير بالتالي إحداثيات النقط في المستوى، وسوف ندرس الآن طريقة إيجاد الإحداثيات بالنسبة للمحاور الجديدة إذا علمنا هذه الإحداثيات بالنسبة للمحاور الأصلية.

أولاً: نقل المحاور (تغيير نقطة الأصل):

نقل المحاور هو تغيير نقطة الأصل للإحداثيات بدون تغيير إتجاه المحاور. نفرض أن لدينا الإحداثيات OX, OY وأن النقطة O' لها الإحداثيات (h, k) بالنسبة لهذه المحاور. لو رسمنا خطان مستقيمان يمران بالنقطة O' وبحيث يكون المستقيم الأول موازياً لمحور X



وسميناه $O'X'$ والمستقيم الثاني موازياً لمحور Y وسميناه $O'Y'$. واضح إذن أن $O'X', O'Y'$ يصلحان لأن يكونا محاور إحداثيات متعامدة. لو فرضنا أن لدينا أي نقطة P في مستوى الصفحة

إحداثياتها بالنسبة للمحاور الأصلية هي (x, y) وأن إحداثياتها بالنسبة للمحاور الجديدة هي (x', y') . لإيجاد العلاقة بين إحداثيات النقطة P بالنسبة لكلاً من المحاور القديمة والجديدة. من الرسم نلاحظ أن:

$$\left. \begin{array}{l} x = x' + h \\ y = y' + k \end{array} \right\} \dots (4)$$

أيضاً

$$\left. \begin{array}{l} x' = x - h \\ y' = y - k \end{array} \right\} \dots (5)$$

العلاقة (4) تعطي إحداثيات النقطة P بالنسبة للمحاور الأصلية بدلالة الجديدة بينما العلاقة (5) تعطي إحداثياتها بالنسبة للمحاور الجديدة بدلالة المحاور الأصلية.

مثال (3. 2. 1):

أوجد الإحداثيات الجديدة للنقطتين $P_1(-3, 1)$, $P_2(4, -2)$ إذا نُقلت نقطة الأصل إلى النقطة $(-3, 5)$.

الحل:

بتطبيق العلاقة (5) بالنسبة للنقطتين مع ملاحظة أن $(h, k) = (-3, 5)$ نجد أن النقطة $P_1(-3, 1)$ تصبح إحداثيات $(0, -4)$ بينما النقطة $P_2(4, -2)$ تصبح إحداثياتها $(7, -7)$ بالنسبة للمحاور الجديدة.

مثال (3. 2. 2):

أوجد معادلة الدائرة $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 4 = 0$ إذا نُقلت نقطة الأصل إلى النقطة $(-5, 2)$.

الحل:

المطلوب إيجاد معادلة هذه الدائرة بدلالة الإحداثيات الجديدة ومن ثم نستخدم العلاقة (4) مع الأخذ في الاعتبار أن $k = 2$, $h = -5$ ومن ثم تكون $y = y' + 2$, $x = x' - 5$ وبالتالي معادلة الدائرة تقول إلى

$$(x' - 5)^2 + (y' + 2)^2 + 10(x' - 5) - 4(y' + 2) + 4 = 0$$

$$\text{أي أن } x'^2 + y'^2 = 25$$

مثال (3. 2. 3):

انقل المحاور بحيث يمكن كتابة معادلة الدائرة $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 4 = 0$ في صورة لا تحتوى على حدود من الدرجة الأولى.

الحل:

نكتب المعادلة المعطاة على الصورة

$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 4y + 4) = 25$$

ثم نكمل المربعات كالتالى

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

الآن بوضع $x' = x + 5$, $y' = y - 2$ فإن المعادلة الأخيرة تؤول إلى $x'^2 + y'^2 = 25$ ونلاحظ أن المعادلتين $x' = x + 5$, $y' = y - 2$ هما معادلتى نقل المحاور الأصلية إلى محاور جديدة نقطة أصلها هي النقطة $(-5, 2)$.

مثال (3. 2. 4):

أوجد معادلة المستقيم $2x - 3y - 5 = 0$ مسنداً إلى محورين يوازين المحورين الأصليين ويمران بالنقطة $(-3, -2)$.

الحل:

المطلوب إيجاد معادلة هذا المستقيم بدلالة الإحداثيات الجديدة ومن ثم نستخدم العلاقة (4) مع الأخذ في الاعتبار أن $k = -3$, $h = -2$ ومن ثم تكون

$$x = x' - 2 , y = y' - 3$$

وبالتالى تؤول معادلة المستقيم المعطى إلى

$$2(x' - 2) - 3(y' - 3) - 5 = 0$$

$$2x' - 3y' = 0 \quad \text{أي أن}$$

واضح أن معادلة الخط المستقيم بدلالة الإحداثيات الجديدة تمر بنقطة الأصل (المحاور الجديدة).

ثانياً: دوران المعادلات:

دوران المحاور هو تغيير إتجاه المحاور بدون تغيير نقطة الأصل. في كثير من الأحيان يكون من المفيد أن نستعاض عن محاور الإحداثيات OY , OX بمحاور كارتيزية جديدة تشترك مع المحاور الأصلية في نقطة الأصل، ولنفرض أن محاور الإحداثيات الجديدة هذه تنشأ من دوران المحاور الأصلية بزاوية مقدارها θ لنفرض أن P نقطة ما في المستوى وأن إحداثياتها بالنسبة للمحاور الأصلية هي (x, y) وأن إحداثياتها بالنسبة للمحاور الجديدة هي (x', y') . كذلك إذا اعتبرنا

أن OX' هو محور قطبي (أو خط ابتدائي) فإن النقطة P يكون لها الإحداثيان القطبيان (r, ϕ) ومن ثم نجد أن:

$$x' = r \cos \phi, \quad y' = r \sin \phi$$

أما إذا اعتبرنا أن OX هو المحور القطبي فإن النقطة P في هذه الحالة يكون لها الإحداثيان القطبيان $(r, \theta + \phi)$ ومن ثم نجد في هذه الحالة أن:

$$x = r \cos(\theta + \phi), \quad y = r \sin(\theta + \phi)$$

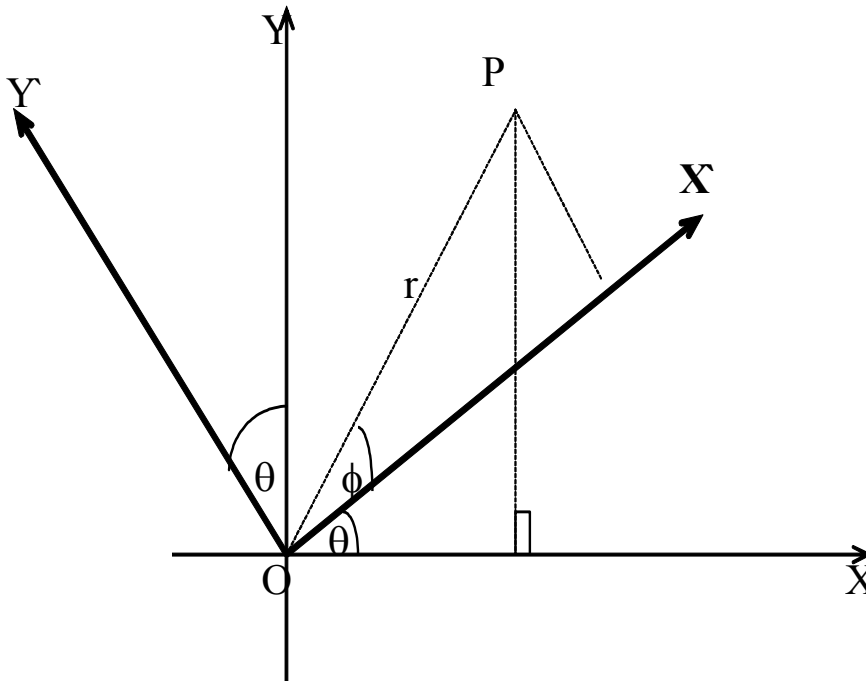
أي أن

$$x = r(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi), \quad y = r(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)$$

ومن ثم تكون

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \dots (6)$$

العلاقتان (6) يمكننا بواسطتهما التعبير عن الإحداثيات الأصلية (x, y) للنقطة بدلالة الإحداثيات الجديدة (x', y') .



بنفس الطريقة يمكننا استنتاج العلاقة العكسية "أو يمكننا الحصول عليها بسهولة من (6) باستبدال θ بـ $-\theta$ و x, y بـ x', y' والعكس بالعكس أو بأي طريقة أخرى" ليكون:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

وبذلك يمكن حساب الإحداثيات الجديدة للنقطة (x', y') بدلالة الإحداثيات الأصلية.

ملحوظة (3.2.5):

عندما يكون لدينا عملية نقل نقطة الأصل مع دوران المحاور في آن واحد فإننا نحصل النتائج السابقة أي أننا إذا نقلنا نقطة الأصل إلى النقطة (h, k) وأدركنا في نفس الوقت المحاور بزاوية مقدارها θ فإن:

$$x = h + x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad y = k + x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

مثال (3.2.6):

أوجد معادلة المنحنى $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2a^2$ إذا دارت محاور الإحداثيات بزاوية مقدارها 30° .

الحل: المطلوب إيجاد معادلة المنحنى بدلالة الإحداثيات الجديدة ومن ثم نستخدم

العلاقتان (6) مع الأخذ في الاعتبار أن $\theta = 30^\circ$ ومن ثم تكون

$$x = x' \cos 30 - y' \sin 30 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y'),$$

$$y = x' \sin 30 + y' \cos 30 = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y')$$

ومن ثم تتحول المعادلة الأصلية إلى

$$x'^2 - y'^2 = a^2$$