

المحاضرة العاشرة

أمثلة متنوعة

(1) احسب

$$I = \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx$$

الحل :

بأخذ التعويض $t = \tan x$ فيكون

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

إذن

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}} dt = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = \int (t^{-4} + 2t^{-2} + 1) dt \\ &= -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + c = -\frac{1}{3} \cot^3 x - 2 \cot x + \tan x + c \end{aligned}$$

(2) احسب

$$I = \int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$$

الحل : نأخذ التعويض $t = \tan \frac{x}{2}$ ثم أكمل الحل كتمرين .

(3) احسب

$$I = \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 9}} dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 9}} dx \cdot \frac{x - \sqrt{x^2 + 9}}{x - \sqrt{x^2 + 9}} dx = \int \frac{(x - \sqrt{x^2 + 9}) dx}{-9} \\ &= \frac{1}{9} \int (\sqrt{x^2 + 9} - x) dx = \frac{-1}{18} x^2 + \frac{1}{9} \int \sqrt{x^2 + 9} dx \end{aligned}$$

وبأخذ التعويض $x = 3 \tan t$ يكون

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 9} dx &= \frac{1}{9} \int 3 \sec t \cdot 3 \sec^2 t dt \\ &= \int \sec^3 t dt = \frac{1}{2} \sec t \tan t + \frac{1}{2} \ln |\sec t + \tan t| + c_1 \end{aligned}$$

ويكون

$$\begin{aligned}\therefore I &= -\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sqrt{x^2+9}\right)\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{3}\sqrt{x^2+9} + \frac{x}{3}\right| + c \\ &= \frac{x}{18}\sqrt{x^2+9} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+9} + \frac{1}{3}x\right| - \frac{1}{18}x^2 + c\end{aligned}$$

(4) احسب

$$I = \int \frac{1}{a \cos x + b \sin x} dx$$

حيث $a, b \in \mathbb{R}$ & $b > 0$, $a > 0$

الحل :

حيث أن $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $-1 < \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$. إذن يمكن افتراض أن

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

وبالتالى فإن

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{a \cos x + b \sin x} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{1}{\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{1}{\cos(x-\alpha)} dx\end{aligned}$$

إذن

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \sec(x-\alpha) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln|\sec(x-\alpha) + \tan(x-\alpha)| + c$$

أى أن

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\frac{1+\sin(x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)}\right| + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\frac{1+\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha}{\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha}\right| + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+b^2} + a \sin x - b \cos x}{a \cos x + b \sin x}\right| + c\end{aligned}$$

(5) احسب التكامل

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+2)}} dx$$

الحل :

$$(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6 = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

إذن بأخذ التعويض

$$(x + \frac{5}{2}) = \frac{1}{2} \sec t$$

يكون

$$dx = \frac{1}{2} \sec t \tan t dt$$

وحدود التكامل تصبح من $t = \sec^{-1} 3$ إلى $t = \sec^{-1} 7$

إذن

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+2)}} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \sec t \tan t}{\sqrt{\frac{1}{4} \sec^2 t - \frac{1}{4}}} dt = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + c$$

ويكون

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+2)}} dx &= \ln |\sec t + \tan t| \Big|_{\sec^{-1} 3}^{\sec^{-1} 7} \\ &= \ln |7 + 4\sqrt{3}| - \ln |3 + 2\sqrt{2}| = \ln \left| \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{2}} \right| \end{aligned}$$

(6) احسب

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \cos^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

الحل :

$$dt = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} dx \quad \text{يكون} \quad t = \cos^{-1} x^2$$

إذن

$$\int \frac{x \cos^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = -\frac{1}{2} \int t dt = -\frac{1}{4} t^2 + c = -\frac{1}{4} (\cos^{-1} x^2)^2 + c$$

وبالتالى يكون

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \cos^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = -\frac{1}{4} \{ (\cos^{-1} \frac{1}{2})^2 - (\cos^{-1} 0)^2 \} = -\frac{1}{4} \{ \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{4} \} = \frac{5\pi^2}{144}$$

ملاحظة :

يمكن إثبات العلاقة الآتية

$$\boxed{\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx}$$

بأخذ التعويض $x = a - t$ فيكون $dx = -dt$ وحدود التكامل تصبح من $t = a$ إلى $t = 0$ وينتج أن

$$\int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(a-t) (-dt) = \int_0^a f(a-t) dt = \int_0^a f(a-x) dx$$

(7) احسب التكامل

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

الحل :

من الملاحظة السابقة يكون

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \sin(\pi - x)}{1 + \cos^2(\pi - x)} dx \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx - \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \end{aligned}$$

وينتج من ذلك أن

$$2 \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\pi \int_0^\pi \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} dx = -\pi \tan^{-1}(\cos x) \Big|_0^\pi$$

إذن

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{1}{2} \pi \{ \tan^{-1}(-1) - \tan^{-1}(1) \} = -\frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right\} = \frac{\pi^2}{4}$$

(8) احسب التكامل

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$$

لأي عدد حقيقي n .

الحل :

من الملاحظة السابقة مع ملاحظة أن

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

يكون

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t} dt$$

أي أن

$$\begin{aligned} 2I &= I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x + \sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} dx = x \Big|_0^{\pi/2} = \pi/2 \end{aligned}$$

وبالتالي يكون $I = \pi/4$.

(9) باستخدام النظرية الأساسية للتحليل احسب النهاية الآتية :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \sqrt{2+5x^3} dx$$

الحل :

بفرض أن

$$F(t) = \int_0^t \sqrt{2+5x^3} dx \quad , \quad t > -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

إذن

$$F(1+h) = \int_0^{1+h} \sqrt{2+5x^3} dx \quad \& \quad F(1) = \int_0^1 \sqrt{2+5x^3} dx$$

$$\therefore F(1+h) - F(1) = \int_0^{1+h} \sqrt{2+5x^3} dx - \int_0^1 \sqrt{2+5x^3} dx$$

$$\therefore \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^{1+h} \sqrt{2+5x^3} dx$$

ولكن

$$F'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{1+h} \sqrt{2+5x^3} dx$$

ولكن من النظرية الأساسية للتحليل

$$F'(x) = \sqrt{2+5x^3}$$

ويكون إذن

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{1+h} \sqrt{2+5x^3} dx = F'(1) = \sqrt{2+5} = \sqrt{7}$$

$$(10) \text{ احسب } I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

الحل :

للتخلص من الجذر نأخذ التعويض $x = \sin \theta$ فيكون

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) + c = \frac{1}{2} (\sin^{-1} x + x\sqrt{1-x^2}) + c \end{aligned}$$

وينتج أن

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \{(\sin^{-1} 1 + 0) - (\sin^{-1} 0 + 0)\} = \frac{\pi}{4}$$

(10) احسب التكامل

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$$

الحل :

للتخلص من الجذر نأخذ التعويض $x = \sec \theta$ فيكون

$$dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$$

وعندما تتغير x من 1 إلى 2 فإن θ تتغير من 0 إلى $\frac{\pi}{3}$ ويكون إذن

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan \theta}{\sec^4 \theta} \sec \theta \tan \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta d \sin \theta \\
&= \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

(12) احسب التكامل

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^5 \sin^6 x \cos^{11} x dx$$

الحل :

واضح أن الدالة تحت علامة التكامل دالة فردية على فترة التكامل المعطاه وبالتالي من خصائص التكامل المحدد ينتج أن قيمة التكامل تساوى صفرا.

=====