

المحاضرة التاسعة

أمثلة (2. 6. 11) : على التكاملات المثلثية : Trigonometric Integrals

$$\int \sin^4 x \, dx \quad (1) \text{ احسب}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \, dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \end{aligned}$$

(2) احسب

$$\int \cos^4 x \, dx$$

الحل : تمرين .

بنفس الطريقة السابقة يمكن حساب

$$\int \cos^n x \, dx, \int \sin^n x \, dx$$

عندما تكون n عددا صحيحا زوجيا موجبا ، حيث يمكن كتابة

$$\sin^{2m} x = (\sin^2 x)^m = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^m$$

(3) احسب

$$\int \sin^3 x \, dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)(-d \cos x) = -\left[\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} \right] + c \\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c \end{aligned}$$

(4) احسب

$$\int \cos^3 x dx$$

الحل : تمرين .

بنفس الطريقة السابقة يمكن حساب $\int \cos^n x dx, \int \sin^n x dx$ حيث n عددا فرديا صحيحا موجبا، لأنه يمكن كتابة

$$\sin^{2m+1} x = (\sin^2 x)^m \sin x = (1 - \cos^2 x)^m \sin x$$

وهكذا في حالة $\cos^{2m+1} x$.

(5) احسب

$$\int \sec^4 x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x dx &= \int \sec^2 x \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x) d \tan x \\ &= \int \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

(6) احسب

$$\int \csc^4 x dx$$

الحل : تمرين .

بالمثل يمكن حساب $\int \sec^{2m} x dx$, $\int \csc^{2m} x dx$ عندما تكون m عددا صحيحا موجبا.

(7) احسب

$$\int \sec^5 x dx$$

الحل :

$$\int \sec^5 x dx = \int \sec^3 x \sec^2 x dx$$

وبأخذ

$$u = \sec^3 x \quad \& \quad dv = \sec^2 x dx$$

يكون

$$du = 3 \sec^2 x \sec x \tan x \quad \& \quad v = \tan x$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int \sec^5 x \, dx &= \sec^3 x \tan x - \int 3 \sec^3 x \tan^2 x \, dx \\
&= \sec^3 x \tan x - 3 \int \sec^3 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \sec^3 x \tan x - 3 \int \sec^5 x \, dx + 3 \int \sec^3 x \, dx
\end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}
4 \int \sec^5 x \, dx &= \sec^3 x \tan x + 3 \left[\frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x \tan x| \right] + c \\
\therefore \int \sec^5 x \, dx &= \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{8} \sec x \tan x + \frac{3}{8} \ln |\sec x \tan x| + L
\end{aligned}$$

حيث L ثابت اختياري .

$$\int \csc^{2m+1} x \, dx \quad \& \quad \int \sec^{2m+1} x \, dx$$

عندما تكون m عدد طبيعي .

(8) احسب

$$\int \tan^4 x \, dx$$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x \, dx &= \int (\tan^2 x)^2 \, dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \, dx = \int (\sec^4 x - 2 \sec^2 x + 1) \, dx \\
&= \int \sec^4 x \sec^2 x - 2 \int \sec^2 x \, dx + \int dx \\
&= \int (\tan^2 x + 1)(d \tan x) - 2 \int \sec^2 x \, dx + \int dx \\
&= \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - 2 \tan x + x + c
\end{aligned}$$

(9) احسب

$$\int \cot^4 x \, dx$$

الحل : تمرين .

بنفس الطريقة يمكن حساب $\int \cot^{2m} x \, dx, \int \tan^{2m} x \, dx$ عندما تكون m عدداً طبيعياً .

(10) احسب

$$\int \tan^3 x \, dx$$

الحل :

$$\int \tan^3 x dx = \int \tan^2 x \tan x dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan x dx$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \tan^3 x dx &= \int \sec^2 x \tan x dx - \int \tan x dx = \int \sec x (\sec x \tan x dx) - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int \sec x (d \sec x) + \int \frac{1}{\cos x} (d \cos x) = \frac{1}{2} \sec^2 x + \ln |\cos x| + c \end{aligned}$$

(11) احسب

$$\int \cot^3 x dx$$

الحل : تمرين .

بالمثل يمكن حساب $\int \cot^{2m+1} x dx, \int \tan^{2m+1} x dx$ عندما تكون m عددا طيعيا .

(12) احسب

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^5 x dx &= \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int (\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x) \cos x dx \\ &= \int (\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x) d(\sin x) \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \end{aligned}$$

(13) احسب

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx$$

الحل : تمرين .

كذلك يمكن حساب $\int \sin^n x \cos^m x dx$ عندما يكون m أو n عددا فرديا موجبا .

(14) احسب

$$\int \sin^4 x \cos^4 x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 (\cos^2 x)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ \therefore \int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos^2 2x)^2 dx \\ &= \frac{1}{16} \int (\sin^2 2x)^2 dx = \frac{1}{16} \int \sin^4 2x dx \\ &= \frac{3}{128} x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{1}{1024} \sin 8x + c\end{aligned}$$

بنفس الطريقة يمكن حساب $\int \sin^n x \cos^m x dx$ عندما يكون كلا من m, n عددا زوجيا موجبا .
(15) احسب

$$\int \tan^3 x \sec^3 x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^3 x dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \sec x \tan x dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x d(\sec x) \\ &= \int (\sec^4 x - \sec^2 x) d(\sec x) = \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + c\end{aligned}$$

بنفس الطريقة يمكن حساب $\int \sec^m x \tan^n x dx$ عندما يكون كل من m, n عددا فرديا موجبا .
(16) احسب

$$\int \tan^2 x \sec^4 x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^4 x dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) d \tan x \\ &= \int (\tan^2 x + \tan^4 x) d \tan x = \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن حساب $\int \tan^m x \sec^n x dx$ عندما يكون n عددا زوجيا موجبا .
(17) احسب

$$\int \tan^2 x \sec^3 x dx$$

الحل :

$$\int \tan^2 x \sec^3 x dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x dx = \int \sec^5 x dx - \int \sec^3 x dx$$

ويمكن حساب هذه التكاملات الأخيرة كما سبق في حساب تكامل $\int \sec^{2m+1} x dx$ حيث m عددا طبيعيا .

بالمثل يمكن حساب التكاملات على الصورة $\int \tan^n x \sec^m x dx$ عندما يكون n عددا زوجيا موجبا و m عددا فرديا موجبا ، بتحويلها إلى تكاملات على الصورة $\int \sec^k x dx$

بند (7) : التكامل بالاختزال المتتالي :

نستخدم طريقة التكامل بالاختزال المتتالي عادة لحساب تكاملات بعض الدوال التي تعتمد على مقدار ثابت n أو عدة مقادير ثابتة $m, n, \dots$ وباستخدام هذه الطريقة يمكن التعبير عن التكامل المعطى بدلالة تكاملات يمكن حسابها بالطرق الأساسية السابقة دراستها ، وبصفة عامة فإن معظم علاقات الاختزال يستخدم لاستنتاجها قاعدة التكامل بالتجزئ .

أمثلة (1.7.2) :

$$(1) \text{ أو وجد قانوناً اختزالياً لحساب التكامل } I_n = \int \sin^n x dx$$

الحل:

$$I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx = \int \sin^{n-1} x d \cos x$$

وبأخذ

$$u = \sin^{n-1} x \quad \& \quad dv = d \cos x$$

يكون

$$du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \quad \& \quad v = \cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore I_n &= -\int \sin^{n-1} x d(\cos x) \\ &= -\{\cos x \sin^{n-1} x - \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx\} \\ &= -\{\cos x \sin^{n-1} x - (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx\} \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

إذن

$$n I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

ويكون

$$I_n = \frac{-1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

فمثلاً إذا كانت $n = 2$ فإن

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} I_0 = -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} \int dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x + c \end{aligned}$$

وبأخذ $n = 3$ يكون

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{1}{3} \cos x \sin^2 x + \frac{2}{3} I_1 = -\frac{1}{3} \cos x \sin^2 x + \frac{2}{3} \int \sin x dx \\ &= -\frac{1}{3} \cos x \sin^2 x - \frac{2}{3} \cos x + c \end{aligned}$$

إذن إذا كان $I_n = \int \sin^n x dx$ فإن

$$= -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad I_n = \int \sin^n x dx$$

حيث n عدد طبيعي .

(2) أوجد قانوناً اختزالياً للتكامل

$$I_n = \int \cos^n x dx$$

الحل : تمرين وعلى الطالب التأكد من أن :

$$I_n = \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n \in N, \quad n \geq 2$$

(3) أوجد قانوناً اختزالياً للتكامل

$$I_n = \int \tan^n x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \int \tan^{n-2} x d(\tan x) - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2} \end{aligned}$$

أي أن

$$I_n = \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}, \quad n \in N, \quad n \geq 2$$

(4) أوجد قانوناً اختزالياً للتكامل

$$I_n = \int \cot^n x dx$$

الحل : يمكن للطالب التأكد من أن

$$I_n = \int \cot^n x dx = \frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - I_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

(5) أوجد قانوناً اختزالياً للتكامل

$$I_n = \int \sec^n x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sec^n x dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx = \int \sec^{n-2} x d(\tan x) \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-3} x \sec x \tan x \tan x dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx \\ \therefore (n-1)I_n &= \sec^{n-2} x \tan x + (n-2)I_{n-2} \end{aligned}$$

أي أن

$$I_n = \int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

(6) أوجد قانوناً اختزالياً لحساب التكامل

$$I_n = \int \csc^n x dx$$

الحل : تحقق من أن

$$I_n = \int \csc^n x dx = -\frac{1}{n-1} \csc^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

(7) أوجد قانوناً اختزالياً لحساب التكامل

$$I_n = \int (\arcsin x)^n dx$$

الحل :

بأخذ التعويض $t = \arcsin x$ ، فيكون $x = \sin t$ وبالتالي $dx = \cos t dt$ وينتج أن

$$I_n = \int (\arcsin x)^n dx = \int t^n \cos t dt$$

بأخذ التجزئ

$$u = t^n, \quad dv = \cos t dt$$

$$\therefore I_n = t^n \sin t - n \int t^{n-1} \sin t dt$$

وبإجراء التجزئ ثانية على التكامل الأخير وبأخذ

$$u = t^{n-1}, \quad dv = \sin t dt$$

$$\therefore du = (n-1)t^{n-2} dt, \quad v = -\cos t$$

$$\begin{aligned} \therefore I_n &= t^n \sin t - n \{-t^{n-1} \cos t - \int -(n-1)t^{n-2} \cos t dt\} \\ &= t^n \sin t + nt^{n-1} \cos t - n(n-1) \int t^{n-2} \cos t dt \\ &= t^n \sin t + nt^{n-1} \cos t - n(n-1)I_{n-2} \\ &= (\arcsin x)^n x + n(\arcsin x)^{n-1} \sqrt{1-x^2} - n(n-1)I_{n-2} \end{aligned}$$

إذن

$$\boxed{I_n = \int (\arcsin x)^n dx = (\arcsin x)^n x + n(\arcsin x)^{n-1} \sqrt{1-x^2} - n(n-1)I_{n-2}, \quad n \in N}$$

وبنفس الطريقة يمكن استنتاج قانوناً اختزالياً لحساب

$$I_n = \int (\arccos x)^n dx$$

(8) أوجد قانوناً اختزالياً لحساب

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx, \quad a \text{ constant}, \quad a \neq 0$$

الحل: بإجراء التكامل بالتجزئ نحصل على

$$\begin{aligned} I_n = \int x^n e^{ax} dx &= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \int n x^{n-1} \frac{e^{ax}}{a} dx \\ &= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1} \end{aligned}$$

أى أن

$$\boxed{I_n = \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}, \quad n \in N}$$

(9) أوجد قانوناً اختزالياً لحساب

$$I_n = \int \cos^n x e^{ax} dx, \quad a \text{ constant}, \quad a \neq 0$$

الحل:

يترك للطالب كتمرين وعليه التحقق من أن

$$\boxed{I_n = \frac{a e^{ax} \cos^{n-1} x}{a^2 + n^2} \left\{ \cos x + \frac{n}{a} \sin x \right\} + \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}, \quad n \in N}$$

(10) أوجد قانوناً اختزالياً لحساب

$$I_n = \int (\ln x)^n dx$$

الحل : باستخدام التجزىء

$$u = (\ln x)^n, \quad dv = dx$$

$$\therefore du = n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx, \quad v = x$$

فيكون

$$I_n = \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx = x (\ln x) - n I_{n-1}$$
