

المحاضرة الثامنة

بند (5) التعويضات المثلثية أو الزائدية

Trigonometric or Hyperbolic Substitutions

إذا أردنا حساب تكاملات تحتوي دوالها المكاملة على أي من التعبيرات الآتية :

$$\sqrt{x^2 - a^2} \quad \& \quad \sqrt{a^2 - x^2} \quad \& \quad \sqrt{a^2 + x^2}$$

فإننا نستخدم ما يعرف بالتعويضات المثلثية أو الزائدية .

فمثلا في حالة $\sqrt{x^2 - a^2}$ لو أخذنا $x = a \sec \theta$ فإن

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} = |a| \tan \theta \quad \&$$

$$dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup] \frac{\pi}{2}, \pi]$$

وفي حالة $\sqrt{a^2 - x^2}$ لو أخذنا $x = a \sin \theta$ فإن

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} = |a| |\cos \theta| = |a| \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$dx = a \cos \theta d\theta, \quad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

وفي هذه الحالة أيضا يمكننا أخذ التعويض $x = a \tanh \theta$.

وفي حالة $\sqrt{a^2 + x^2}$ لو أخذنا $x = a \tan \theta$ فإن

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} = |a| \sec \theta, \quad \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$dx = a \sec^2 \theta d\theta$$

وأيضا يمكننا أخذ التعويض $x = a \sinh \theta$.

ويمكن تلخيص ما سبق كالآتي :

<u>ملاحظات</u>	<u>التعويضات المثلثية المناسبة</u>	<u>الدالة المكاملة</u>
$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup] \frac{\pi}{2}, \pi]$	$x = a \sec \theta$	$\sqrt{x^2 - a^2}$
$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$x = a \sin \theta$	$\sqrt{a^2 - x^2}$
$\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$x = a \tan \theta$	$\sqrt{a^2 + x^2}$

مثال (2.5.1) : احسب

$$I = \int \frac{dx}{x(x^2 + 4)^{3/2}}$$

الحل :

حيث أنه يوجد $\sqrt{x^2 + 4}$ في الدالة المكاملة ، إذن نستخدم التعويض

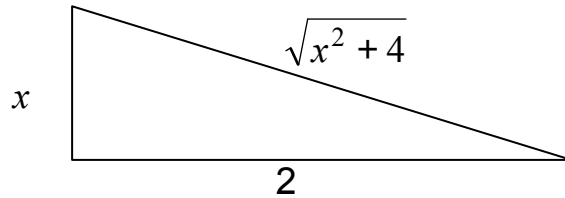
$$x = 2 \tan \theta , \quad \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$$

ويكون

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x(x^2 + 4)^{3/2}} = \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{2 \tan \theta (4 \tan^2 \theta + 4)^{3/2}} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{8 \tan \theta \sec^3 \theta} \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{\sec \theta \tan \theta} d\theta = \frac{1}{8} \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{1}{8} \int \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int (\csc \theta - \sin \theta) d\theta = \frac{1}{8} \int \csc \theta d\theta - \frac{1}{8} \int \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} \ln |\cot \theta - \csc \theta| + \frac{1}{8} \cos \theta + c \end{aligned}$$

ولكن من التعويض المستخدم يمكن اعتبار مثلث قائم الزاوية أحد زواياه θ ونستخدم من المثلث القيم المثلثية الأخرى الناتجة في الحل ويكون



$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2}{x} - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 4} \right| + \frac{1}{8} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} + c \\ &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{x} \right| + \frac{1}{4} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} + c \end{aligned}$$

بند (6) : الصيغ التربيعية : Quadratic Expressions

أولاً: عند حساب التكاملات بطريقة الكسور الجزئية كان هناك بعض الكسور ذات مقام $ax^2 + bx + c$ والغير قابل للتحليل. في هذه الحالة فإن التكامل يمكن إيجاده بطريقة إكمال المربع كالآتي :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right\}$$

ومن ثم نأخذ التعويض

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} \tan \theta$$

إذا كان

$$\frac{c}{a} > \frac{b^2}{4a^2}$$

أما إذا كان $\frac{c}{a} < \frac{b^2}{4a^2}$ فإننا نستخدم التعويض

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \sec \theta$$

مثال (2.6.1): احسب

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2-4x+13} dx$$

الحل:

واضح أن المقام درجة ثانية لا يحل . إذن نكمل المربع للمقام

$$x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$$

وبأخذ التعويض $u = x - 2$ ينتج أن $du = dx$ ويكون

$$I = \int \frac{2(u+2)+1}{u^2+9} du = \int \frac{2u}{u^2+9} du + 5 \int \frac{du}{u^2+9}$$

$$= \ln(u^2+9) + \frac{5}{3} \tan^{-1} \frac{u}{3} + c = \ln(x^2-4x+13) + \frac{5}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x-2}{3} \right) + c$$

ثانيا : إذا كانت الدرجة الثانية تحت علامة الجذر التربيعي مثل

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{أو} \quad \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

في مثل هذه التكاملات نكمل المربع للمقدار تحت الجذر ثم نستخدم إحدى التعويضات المثلثية أو الزائدية.

مثال (2.6.2): احسب

$$\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$$

نكمل المربع للمقدار تحت الجذر

$$3 + 2x - x^2 = -(x^2 - 2x - 3) = -[(x-1)^2 - 4] = 4 - (x-1)^2$$

وللتسهيل نعتبر التعويض $t = x - 1$ فيكون $dt = dx$ ويصبح

$$\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \sin^{-1} \frac{t}{2} + c = \sin^{-1} \left(\frac{x-1}{2} \right) + c$$

مثال (2.6.3): احسب

$$\int \sqrt{x^2 + 4x} dx$$

الحل:

نكمل المربع للمقدار تحت الجذر

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$$

وبوضع $t = x+2$ يكون $dt = dx$ ، إذن

$$I = \int \sqrt{x^2 + 4x} dx = \int \sqrt{t^2 - 4} dt$$

ضع $t = 2 \cosh \theta$ إذن $dt = 2 \sinh \theta d\theta$

وبالتالي

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{4 \cosh^2 \theta - 4} \cdot 2 \sinh \theta d\theta = 4 \int \sinh^2 \theta d\theta \\ &= 4 \int \frac{1}{2} (\cosh 2\theta - 1) d\theta = \sinh 2\theta - 2\theta + c = 2 \cosh \theta \sqrt{\cosh^2 \theta - 1} - 2\theta + c \\ &= t \sqrt{\frac{t^2}{4} - 1} - 2 \cosh^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) + c = \frac{t}{2} \sqrt{t^2 - 4} - 2 \cosh^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) + c \\ &= \left(\frac{x+2}{2} \right) \sqrt{x^2 + 4x} - 2 \cosh^{-1} \left(\frac{x+2}{2} \right) + c \end{aligned}$$

لاحظ أنه إذا كان البسط من الدرجة الأولى والمقام من الدرجة الثانية تحت الجذر التربيعي فنجعل البسط تفاضل ما تحت الجذر قي المقام ويطرد الكسر الزائد ويحسب بالطريقة المذكورة في ثانيا .

مثال (2.6.4): احسب

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx$$

الحل: كما سبق

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 1 + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx \\
&= \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx
\end{aligned}$$

لحساب التكامل الأخير لاحظ أن $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ ثم بوضع $t = x - \frac{1}{2}$ يكون $dt = dx$ وبالتالي

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}} = \sinh^{-1} \left(\frac{2t}{\sqrt{3}} \right) + c_1 = \sinh^{-1} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + c_1 \\
\therefore I &= \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + c
\end{aligned}$$

مثال (2.6.5) : احسب

$$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{21 + 4x - x^2}}$$

الحل : نكمل المربع للمقدار تحت الجذر

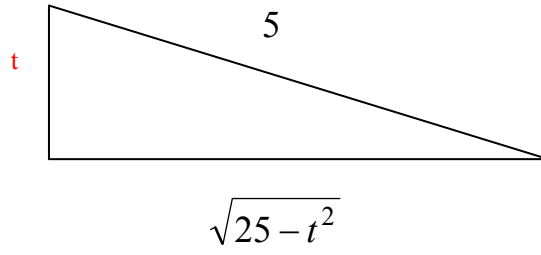
$$21 + 4x - x^2 = 25 - (x - 2)^2$$

ثم بوضع $t = x - 2$ ينتج أن $dt = dx$ ويكون

$$I = \int \frac{(t + 2)^2 dt}{\sqrt{25 - t^2}} = \int \frac{t^2 + 2t + 4}{\sqrt{25 - t^2}} dt$$

للتخلص من الجذر نأخذ التعويض $t = 5 \sin \theta \Rightarrow dt = 5 \cos \theta d\theta$ وبالتالي

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{25 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 4}{5 \cos \theta} \cdot 5 \cos \theta d\theta = \int (25 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 4) d\theta \\
&= \frac{25}{2} \int (1 - \cos 2\theta) d\theta + 2 \int \sin \theta d\theta + 4 \int d\theta \\
&= \frac{25}{2} \theta - \frac{25}{4} \sin 2\theta - 2 \cos \theta + 4\theta + c = \frac{33}{2} \theta - \frac{25}{2} \sin \theta \cos \theta - 2 \cos \theta + c
\end{aligned}$$



$$I = \frac{33}{2} \sin^{-1}\left(\frac{t}{5}\right) - \frac{25}{2} \cdot \frac{t}{5} \cdot \frac{\sqrt{25-t^2}}{5} - 2 \frac{\sqrt{25-t^2}}{5} + c$$

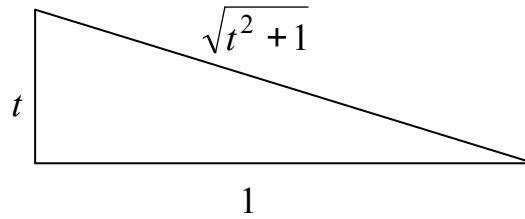
$$= \frac{33}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{5}\right) - \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{21+4x-x^2} + \frac{2}{5}\sqrt{21+4x-x^2} + c$$

ملاحظة (2.6.6):

إذا كانت الدالة المكاملة على الصورة

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a \sin^{k_1} x \cos^{k_2} x + b \sin^{k_3} x \cos^{k_4} x}{c \sin^{m_1} x \cos^{m_2} x + d \sin^{m_3} x \cos^{m_4} x}; k_1, \dots, k_4, m_1, \dots, m_4 \in \mathbb{N}$$

فمن المناسب استخدام التعويض $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$



$$dt = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx$$

إذن

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

أيضا

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \frac{2t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

مثال (2.6.7): احسب

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

الحل :

نأخذ التعويض $t = \tan \frac{x}{2}$ ويكون

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{2t+1-t^2} \\ &= \int \frac{2dt}{2t+1-t^2} = -2 \int \frac{dt}{(t-1)^2 - 2} \\ &= -2 \int \frac{dt}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})} \end{aligned}$$

وبحساب الأخير بالكسور الجزئية ينتج أن

$$\begin{aligned} I &= -2 \ln \left| \frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}} \right| + c = 2 \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}} \right| + c \\ &= 2 \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + c \end{aligned}$$

مثال (2.6.8) : احسب

$$I = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

الحل:

نأخذ التعويض $t = \tan \frac{x}{2}$ ويكون

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1 + \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2 dt}{t^2 + 2t + 1} \\ &= 2 \int \frac{1}{(t+1)^2} dt = -\frac{2}{t+1} + c = -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + c \end{aligned}$$

ملاحظة (2.6.9) :

إذا كانت الدالة المكاملة تحتوي على قى كسرية متعددة للتعبير $(ax + b)$ فإنه من المناسب أخذ التعويض $ax + b = t^n$ هو المقام المشترك الأصغر للقوى الكسرية.

مثال (2. 6. 10) : احسب

$$\int \frac{(4x+5)^{\frac{1}{3}}}{(4x+5)^{\frac{1}{4}} + 4} dx$$

الحل :

من الملاحظة السابقة خذ التعويض $4x+5 = t^{12}$ ثم أكمل الحل كتمرين.

=====

=====