

المحاضرة السابعة

بند (3) : التكامل بالتجزئة Integration by parts

نظرية (2.3.1):

لتكن u ، v دالتين قابلتين للاشتقاق وكانت u' ، v' دالتين متصلتين. إذن يكون

$$\int u v' dx = uv - \int v u' dx$$

أو

$$\int u dv = uv - \int v du$$

البرهان : حيث أن

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

أي أن

$$(uv)' = uv' + u'v$$

فإن

$$uv = \int uv' dx + \int u'v dx$$

ولكن

$$dv = v' dx \quad , \quad du = u' dx$$

إذن

$$\int u dv = uv - \int v du$$

مثال (2.3.2):

أوجد تكامل الدوال الآتية بالنسبة للمتغير x

(i) $\ln x$; (ii) $x^3 e^x$

(iii) $x^n \ln x$, $n \neq -1$

(iv) $\sqrt{1+x^2}$ (v) $(\ln x)^2$

(vi) $x \sin x$ (vii) $e^{ax} \sin bx$

الحل :

(i) بأخذ $u = \ln x$ ، $dv = dx$ ، يكون $du = 1/x dx$ ، $v = x$ وبالتالي

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

$$u = x^3 \quad , \quad dv = e^x dx \quad \text{(ii) بأخذ}$$

إذن

$$du = 3x^2 dx \quad , \quad v = e^x$$

ويكون

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$$

نعيد التجزئة مرة ثانية بأخذ

$$u = x^2 \quad , \quad dv = e^x dx$$

إذن

$$du = 2x dx \quad , \quad v = e^x$$

وبكون

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3[x^2 e^x - 2 \int x e^x dx]$$

نعيد التجزئة مرة ثالثة بأخذ

$$u = x \quad , \quad dv = e^x dx$$

$$du = dx \quad , \quad v = e^x$$

إذن

ويكون

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6[xe^x - \int e^x dx]$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c$$

$$= e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

$$\text{(iii)} \int x^n \ln x dx \quad , \quad n \neq -1$$

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \& \quad du = \frac{dx}{x} \quad \text{إذن} \quad dv = x^n dx \quad \& \quad u = \ln x \quad \text{بأخذ}$$

$$\therefore \int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{1}{n+1} x^n dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \left\{ \ln x - \frac{1}{n+1} \right\} + c$$

$$\text{(iv)} \int \sqrt{1+x^2} dx$$

$$dv = dx \quad \& \quad u = \sqrt{1+x^2}$$

بأخذ

$$v = x \quad \& \quad du = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \sqrt{1+x^2} dx &= x\sqrt{1+x^2} - \int x \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

أي أن

$$2 \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1}(x) + c$$

ويكون

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \sinh^{-1} x + k$$

$$(v) \quad \int (\ln x)^2 dx$$

$$dv = dx \quad \& \quad u = (\ln x)^2 \quad \text{بأخذ}$$

$$v = x \quad \& \quad du = 2(\ln x) \left(\frac{1}{x} \right) dx \quad \text{إذن}$$

ويكون

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx$$

ولكن من (i) نحصل على

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c$$

$$(vi) \quad \int x \sin x dx$$

$$dv = \sin x dx \quad \& \quad u = x \quad \text{بأخذ}$$

$$v = -\cos x \quad \& \quad du = dx \quad \text{إذن}$$

ويكون

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

$$(vii) \quad \int e^{ax} \sin(bx) dx, \quad a \neq 0$$

$$dv = e^{ax} dx \quad \& \quad u = \sin(bx) \quad \text{بأخذ}$$

$$v = \frac{e^{ax}}{a} \quad \& \quad du = b \cos(bx) dx \quad \text{إذن}$$

ويكون

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx$$

ولحساب التكامل الأخير نستخدم التجزئة ثانية وذلك بأخذ

$$dv = e^{ax} dx, \quad u = \cos(bx)$$

إذن

$$v = \frac{e^{ax}}{a}, \quad du = -b \sin(bx)$$

وينتج أن

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \left(\frac{b}{a}\right) \left\{ \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \left(\frac{b}{a}\right) \int e^{ax} \sin(bx) dx \right\}$$

ويكون

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos(bx)$$

إذن

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2}\right) \frac{1}{a^2} e^{ax} [a \sin(bx) - b \cos(bx)] + c \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin(bx) - b \cos(bx)] + c \end{aligned}$$

بند (4) : التكامل باستخدام الكسور الجزئية:

Integration by Partial Fractions

أي دالة قياسية $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث كل من $P(x), Q(x)$ دالة كثيرة حدود ، يمكن كتابتها على

صورة مجموعة كسور أبسط (ما أمكن ذلك) والتي تسمى بالكسور الجزئية للكسر المعطى . وموضوع الكسور الجزئية من الطرق الجبرية التي يجب أن يكون الطالب ألم بها في موضوعات الجبر السابق دراستها ، ولكننا سنذكر الطريقة دون برهان .

نظرية (2.4.1):

باعتبار أن درجة البسط $P(x)$ أقل من درجة المقام $Q(x)$. نحلل المقام إلى أبسط عوامل ممكنة. وبالتالي عوامل المقام تكون إحدى الحالات الآتية :

(أ) عوامل من الدرجة الأولى وجميعها مختلفة أي أن

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad x_i \neq x_j, \quad \forall i \neq j$$

وبالتالي فإن

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_1}{(x - x_1)} + \frac{a_2}{(x - x_2)} + \dots + \frac{a_n}{(x - x_n)}$$

وإذا أمكننا حساب قيم الثوابت $a_1, a_2, \dots, a_n$ في هذه الحالة يكون قد أمكننا كتابة الكسر المعطى في صورة كسور جزئية .

(ب) المقام عبارة عن حاصل ضرب عوامل من الدرجة الأولى إلا أن بعضها مكرر . لنفرض مثلاً أن العامل $(x - x_i)$ إحدى عوامل المقام ومكرر m من المرات فيراعي الحالة (أ) في العوامل الأخرى الغير مكررة وبالنسبة للعامل $(x - x_i)$ يقابله الكسور الجزئية

$$\frac{a_1}{(x - x_i)} + \frac{a_2}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{a_m}{(x - x_i)^m}$$

(ج) المقام حاصل ضرب عوامل بعضها من الدرجة الثانية وغير قابلة للتحليل إلى عوامل من الدرجة الأولى وغير مكررة ، فأى عامل $(ax^2 + bx + c)$ من هذا النوع يناظره الكسر

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

(د) المقام حاصل ضرب عوامل بعضها من الدرجة الثانية وغير قابلة للتحليل إلى عوامل من الدرجة الأولى ومكرر m من المرات أي يظهر على الصورة $(ax^2 + bx + c)^m$ ففي هذه الحالة يقابل هذا العامل الكسر الجزئي الآتي :

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

ملحوظة (2.4.2):

بصفة عامة بعد تحليل المقام إلى أبسط عوامله كل عامل يناظره كثيرة حدود من درجة أقل منه بواحد أي أن العامل $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$ يناظره الكسر

$$\frac{A_0x^{m-1} + A_1x^{m-2} + \dots + A_{m-1}}{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m}$$

وفي حالة تكرار العوامل أيا كانت درجتها ورتبة التكرار نتبع نفس النهج الذي اتبع في (ب) ، (د) . إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام فقبل تحليل المقام نقسم البسط على المقام قسمة مطولة فنحصل على كثيرة حدود ودالة قياسية وهي باقي القسمة على المقام (وتكون درجة البسط أقل من درجة المقام في الدالة القياسية)

أخيراً كيف نحسب قيم الثوابت في الكسور الجزئية الناتجة ؟ هناك طريقتين مختلفتين لهذا الغرض يمكن استخدام إحداهما أو كلاهما معا في نفس الوقت . وهما بضرب طرفي المعادلة في المقام ثم اتباع أي من الآتي :

(i) مقارنة معاملات قوى x المتشابهة في طرفي المعادلة .

(ii) التعويض بقيم مناسبة للمتغير x .

وإليك بعضاً من الأمثلة لتوضيح ما سبق .

أمثلة (2.4.2) :

$$(أ) \text{ احسب التكامل } \int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

الحل:

أولاً نضع الكسر $\frac{1}{x^2 + x - 2}$ في صورة مجموع كسور جزئية

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x+2}$$

ويكون إذن

$$1 = a_1(x+2) + a_2(x-1) = (2a_1 - a_2) + x(a_1 + a_2) \quad (1)$$

ولحساب الثوابت نقارن معاملات قوى x في الطرفين لنحصل على المعادلتين الآتيتين

$$\left. \begin{array}{l} 2a_1 - a_2 = 1 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 = -a_2$$

$$\therefore 2a_1 = 1 + a_2 = 1 - a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3} \quad \& \quad a_2 = -\frac{1}{3}$$

ويكون

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x+2}$$

(يمكن حساب الثوابت بطريقة فرض قيم مناسبة للمتغير x في المعادلة (1) فبوضع $x=1$ نحصل على $1 = a_1 \cdot 3$ وأيضا بوضع $x=-2$ نحصل على $1 = a_2 \cdot (-3)$.) وبالتالي

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+2}$$

إذن يكون

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + c = \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|^{\frac{1}{3}} + c$$

(ب) احسب

$$\int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2} dx$$

الحل:

$$\frac{x+1}{x^3 + 2x^2} = \frac{x+1}{x^2(x+2)}$$

إذن

$$\frac{x+1}{x^2(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+2}$$

ويكون

$$x+1 = ax(x+2) + b(x+2) + cx^2 \quad (2)$$

ولحساب الثوابت :

$$b = \frac{1}{2} \quad \text{بوضع } x=0 \text{ في الطرفين نحصل على المعادلة } 1=2b \text{ إذن } b = \frac{1}{2}$$

بوضع $x=-2$ يكون

$$-1 = 4c \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$$

بالتعويض في المعادلة (2) عن قيم c , b وبوضع $x=1$ يكون

$$\therefore 2 = 3a + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

الطريقة الأخرى لحساب الثوابت :

$$x + 1 = (a + c)x^2 + (2a + b)x + 2b$$

وبمقارنة معاملات قوى x في طرفي المعادلة نحصل على المعادلات
 $a + c = 0$ & $2a + b = 1$ & $2b = 1$

وبحل هذه المعادلات نحصل على نفس الناتج .

$$\therefore \frac{x+1}{x^2(x+2)} = \frac{1}{4} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+2}$$

ويكون

$$\therefore \int \frac{x+1}{x^2(x+2)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4} \ln|x+2| = \ln \left| \frac{x}{x+2} \right|^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2x} + c$$

(ج) احسب

$$\int \frac{(x^2 + x + 2)}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1} dx$$

من الواضح أن :

$x=1$ جذر من جذور المقام أي أن $(x-1)$ إحدى عوامل المقام ولاستخراج باقي العوامل نقسم

المقام على $(x-1)$ قسمة مطولة لنجد أن خارج القسمة (دون باقي) هو

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

وبالتالي يكون

$$\frac{(x^2 + x + 2)}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{(x+1)^3}$$

$$\therefore x^2 + x + 2 = a(x+1)^3 + b(x-1)(x+1)^2 + c(x-1)(x+1) + d(x-1) \quad \dots (3)$$

بوضع $x=1$: إذن $4 = 8a$ ومنها $a = \frac{1}{2}$

بوضع $x=-1$: إذن $2 = -2d$ ومنها $d = -1$

ثم نستخدم طريقة مقارنة معاملات قوى x في طرفي المعادلة وذلك لحساب قيم b, c .

ولكننا سنستعرض فكرة أخرى لحساب هاتين القيمتين فمثلاً بتفاضل (3) بالنسبة إلى x نجد أن طرفي المعادلة

$$2x + 1 = 3a(x+1)^2 + 2b(x-1)(x+1) + b(x+1)^2 + c(x+1) + c(x-1) + d$$

ومن ثم بوضع $x=1$ ، نجد أن $3 = 12a + 4b + 2c + d$ ومنها

$$3 = 4b + 2c + 5 \Rightarrow 2b + c = -1$$

وبوضع $x=-1$ ، إذن $1 = -2c + d$ ، وتكون $c=1$. وينتج أن $b=-1$.

إذن

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2 + x + 2)dx}{x^4 + 2x^3 - x - 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)} - \int \frac{dx}{(x+1)} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{(x+1)^3} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \ln|x+1| - \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} + c \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{x-1}}{(x+1)} \right| - \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} + c \end{aligned}$$

(د) احسب

$$\int \frac{3x^3 + 5x^2 + 4x - 6}{(x^3 - 1)} dx$$

الحل:

من الملاحظ أن درجة البسط تساوي درجة المقام ومن ثم قبل تحليل المقام نقسم البسط على المقام لنحصل على

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 + 5x^2 + 4x - 6}{x^3 - 1} &= 3 + \frac{5x^2 + 4x - 3}{x^3 - 1} = 3 + \frac{5x^2 + 4x - 3}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= 3 + \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + c}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

$$3x^2 + 5x^2 + 4x - 6 = 3(x^3 - 1) + A(x^2 + x + 1) + (Bx + c)(x - 1)$$

إذن بوضع $x=1$ ، نجد أن $6 = 3A$ ومنها $A=2$.

وبمقارنة معاملات قوى x في طرفي المعادلة نحصل على

$$5 = A + B \Rightarrow B = 3 , 4 = A - B + c \Rightarrow c = 5$$

$$\therefore \int \frac{3x^3 + 5x^2 + 4x - 6}{x^3 - 1} dx = 3 \int dx + 2 \int \frac{dx}{(x-1)} + \int \frac{3x + 5}{x^2 + x + 1} dx + c$$

ولحساب التكامل الأخير نتبع الآتي

$$\frac{3x+5}{x^2+x+1} = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{2x + (\frac{10}{3})}{x^2+x+1} \right) = \left(\frac{3}{2}\right) \left[\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{7}{3} \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right]$$

إذن

$$\int \frac{3x^3 + 5x^2 + 4x - 6}{x^3 - 1} dx = 3 \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$$

$$+ \frac{7}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= 3x + 2 \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x^2+x+1| + \frac{7}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \right) + c$$

$$= 3x + 2 \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x^2+x+1| + \frac{7}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c$$

=====

=====