

المحاضرة السادسة

بند (2) : تكاملات يمكن تحويلها للصور القياسية (التكامل بالتعويض):

إستبدال المتغيرات (أو التكامل بالتعويض) هي إحدى الطرق الهامة التي يمكن بها وضع الدالة في صورة تكاملية معروفة يصلح معها إستخدام الصور القياسية المعروفة .

نظرية (2.2.1) :

نفرض الدالة g المتصلة على نطاقها ولها المدى I ، ونفرض الدالة f المتصلة على الفترة I . إذا كانت g قابلة للاشتقاق على نطاقها ، وكانت الدالة F هي الدالة المقابلة للدالة f . إذاً

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

بوضع $u = g(x)$ فإن $du = g'(x) dx$ ، وبالتالي فإن

$$\int f(u) du = F(u) + c$$

مثال (2.2.2) : أوجد التكاملات التالية :

$$(i) \quad \int (x^2 + 1)^2 (2x) dx$$

الحل :

بوضع $u = x^2 + 1$ فإن $du = 2x dx$ إذاً

$$\int (x^2 + 1)^2 (2x) dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + c = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^3 + c$$

$$(ii) \quad \int \sin^3 x \cos x dx$$

الحل :

بوضع $u = \sin x$ فإن $du = \cos x dx$ إذاً

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + c = \frac{1}{4} \sin^4 x + c$$

$$(iii) \quad \int \sin^7 3x \cos 3x dx$$

الحل :

بوضع $u = \sin 3x$ فإن $du = 3 \cos 3x dx$ إذاً

$$\int \sin^7 3x \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int u^7 du = \frac{1}{3} \frac{u^8}{8} + c = \frac{1}{24} \sin^8 3x + c$$

$$(iv) \quad \int \sin(3x + 8) dx$$

الحل :

بوضع $u = 3x + 8$ فإن $du = 3 dx$. إذاً

$$\begin{aligned}\int \sin(3x + 8) dx &= \frac{1}{3} \int \sin u du = -\frac{1}{3} \cos u + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 8) + c\end{aligned}$$

ملاحظة :

من العلاقة بين التفاضل والتكامل والتي تم توضيحها في بداية هذا الباب فإن كل قاعدة تم دراستها في التفاضل يمكن تحويلها إلى قاعدة ماثلة في التكامل غير المحدد

فمثلاً من المعلوم أن $\frac{d}{dx} \left[\sqrt{x^2 + 5} \right] = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$ ، إذاً يمكن كتابة

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} dx = \sqrt{x^2 + 5} + c$$

ونفس الطريقة يمكن استخدامها مع قوانين دالة الدالة (أو قاعده السلسلة) لإيجاد صيغ عامة للتكامل غير المحدد .

النظرية التالية تعطي الصورة العامة لقانون القوة للدوال والسابق دراسته في نظرية (2.1.4) وباستخدام قاعدة السلسلة يمكن البرهنة على صحتها.

نظرية (2.2.3) : (الصورة العامة لقانون القوة للدوال)

$$\int (f(x))^r f'(x) dx = \frac{(f(x))^{r+1}}{r+1} + c \quad ; \quad (r \neq -1)$$

وبوضع $u = g(x)$ نحصل على الصورة :

$$\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + c \quad ; \quad (r \neq -1)$$

حالة خاصة

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

مثال (2.2.4) :

أوجد $\int (2x^3 + 5)^7 x^2 dx$

الحل :

بوضع $u = 2x^3 + 5$ فإن $du = 6x^2 dx$. إذاً

$$\int (2x^3 + 5)^7 x^2 dx = \frac{1}{6} \int u^7 du = \frac{1}{6} \frac{u^8}{8} + c = \frac{1}{48} (2x^3 + 5)^8 + c$$

النظرية التالية تعطى حالة خاصة من النظرية السابقة .

نظرية (5.2.2) :

$$\int (ax + b)^r dx = \begin{cases} \frac{(ax + b)^{r+1}}{a(r+1)} + c & ; r \neq -1 \\ \frac{1}{a} \ln|ax + b| & ; r = -1 \end{cases}$$

مثال (6.2.2) : أوجد التكاملات التالية:

(i) $\int (3x + 5)^8 dx$

الحل : باستخدام النظرية السابقة نجد أن :

$$\int (3x + 5)^8 dx = \frac{(3x + 5)^9}{(3)(9)} + c = \frac{1}{27} (3x + 5)^9 + c$$

(ii) $\int \sqrt{x^2 + 1} (2x) dx$

الحل :

$$\int \sqrt{x^2 + 1} (2x) dx = \int (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)' dx = \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$$

النظرية التالية تأتي مباشرة من نظرية (2.2.3) وذلك بوضع $r = -\frac{1}{2}$.

نظرية (7.2.2) :

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c}$$

وبوضع $u = f(x)$ نحصل على الصورة :

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c}$$

نظرية (8.2.2) :

$$\int f'(ax + b) dx = \frac{1}{a} f(ax + b) + c$$

مثال (2.2.9) : أوجد التكاملات التالية :

$$(i) \int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$$

الحل :

$$\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(1 + \sin 2x)'}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx = \frac{1}{2} (2\sqrt{1 + \sin 2x}) + c = \sqrt{1 + \sin 2x} + c$$

$$(ii) I = \int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx &= \int (x^3 + x - x) \sqrt{x^2 + 1} dx \\ &= \int (x^3 + x) \sqrt{x^2 + 1} dx - \int x \sqrt{x^2 + 1} dx \\ &= \int x(x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} dx - \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} 2x dx \\ \therefore I &= \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} d(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d(x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{5} (x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

$$(iii) \int \frac{2x}{\sqrt{2x-1}} dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{\sqrt{2x-1}} dx &= \int \frac{2x-1+1}{\sqrt{2x-1}} dx = \int \frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} \\ &= \frac{1}{2} \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} (2x-1)' dx + \frac{1}{2} \int \frac{(2x-1)'}{\sqrt{2x-1}} dx = \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2x-1} + c \end{aligned}$$

ملاحظة (2.2.10) :

من نظرية (2.1.1) نعلم أن :

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

حيث F هي الدالة المقابلة للدالة f ، أى أن $F'(x) = f(x)$

مثال (2.2.11) : أوجد التكاملات التالية :

$$(i) \quad \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

الحل :

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int (\cos \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = 2 \int (\cos \sqrt{x}) (\sqrt{x})' dx = 2 \sin \sqrt{x} + c$$

ويلاحظ أنه يمكن إستخدام النظرية السابقة وذلك باستبدال المتغيرات وأخذ التعويض $u = \sqrt{x}$. إذاً

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad \text{وعليه فإن}$$

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos u du = 2 \sin u + c = 2 \sin \sqrt{x} + c$$

$$(ii) \quad \int x \sec(x^2) \tan(x^2) dx$$

الحل : بوضع $u = x^2$ فإن $du = 2x dx$ ، إذاً

$$\int x \sec(x^2) \tan(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \sec u \tan u du = \frac{1}{2} \sec u + c = \frac{1}{2} \sec(x^2) + c$$

$$(iii) \quad \int x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx$$

الحل :

بوضع $u = x^3 + 9$ إذاً $du = 3x^2 dx$. وعليه فإن

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9} (x^3 + 9)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(iv) \quad \int \cos x (1 + \sin x)^3 dx$$

الحل :

بوضع $u = 1 + \sin x$ فإن $du = \cos x dx$. إذاً

$$\int \cos x (1 + \sin x)^3 dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{1}{4} (1 + \sin x)^4 + c$$

مثال (2.2.12) : إحسب قيم التكاملات الآتية :

$$(i) \quad \int_{-a}^a (x - a)^2 dx$$

الحل :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a (x-a)^2 dx &= \int_{-a}^a (x-a)^2 (x-a)' dx = \int_{-a}^a (x-a)^2 d(x-a) \\ &= \left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_{-a}^a = 0 - \left(-\frac{8a^3}{3} \right) = \frac{8a^3}{3}\end{aligned}$$

$$(ii) \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}} dx$$

الحل :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}} dx &= \int_0^1 (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= (-2) \int_0^1 (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} (1-\sqrt{x})' dx \\ &= (-2) \left[\frac{(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

النظرية التالية توضح كيفية إستبدال المتغيرات في التكامل المحدد.

نظرية (2.2.13) :

نفرض الدالة المتصلة $u=g(x)$ على الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق. ونفرض الدالة f دالة متصلة على مدى الدالة g . إذاً

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

مثال (2.2.14) : إحسب قيم التكاملات المحددة التالية:

$$(i) \int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx$$

الحل : لحساب هذا التكامل نضع $u = x^2 + 1$. إذاً

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx$$

وقبل التعويض في التكامل نحسب القيم الجديدة للحدود العليا والسفلى للتكامل .

الحد السفلى : عندما $x=0$ فإن $u=1$

الحد العلوى : عندما $x=1$ فإن $u=2$

$$\therefore \int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 u^3 du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^4}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{8}$$

$$(ii) \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$$

الحل : بوضع $u = \sqrt{2x-1}$ إذاً

$$u^2 = 2x - 1 \Rightarrow 2u du = 2dx \Rightarrow u du = dx$$

الحد السفلى : عندما $x=1$ فإن $u=1$

الحد العلوى : عندما $x=5$ فإن $u=3$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx &= \int_1^3 \frac{1}{2} \left(\frac{u^2 + 1}{u} \right) u du = \frac{1}{2} \int_1^3 (u^2 + 1) du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{3} + u \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left(9 + 3 - \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$(iii) \int_0^3 x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx$$

الحل :

بوضع $u = x^3 + 9$ إذاً $du = 3x^2 dx$

الحد السفلى : عندما $x=0$ فإن $u=9$

الحد العلوى : عندما $x=3$ فإن $u=36$

$$\therefore \int_0^3 x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx = \frac{1}{3} \int_9^{36} u^{1/2} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{3/2} \right]_9^{36} = 42$$

$$(iv) \int_0^{\pi/4} \tan^2 \theta \sec^2 \theta d\theta$$

الحل :

بوضع $u = \tan \theta$ إذاً $du = \sec^2 \theta d\theta$ ويكون

الحد السفلى : عندما $\theta=0$ فإن $u = \tan 0 = 0$

الحد العلوى : عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$ فإن $u = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

$$\therefore \int_0^{\pi/4} \tan^2 \theta \sec^2 \theta \, d\theta = \int_0^1 u^2 \, du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

مثال (2.2.15) : أوجد التكاملات التالية :

$$(i) \quad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \, dx \quad ; \quad (x > 0)$$

الحل : بوضع $u = \ln x$ فإن $du = \frac{1}{x} dx$. إذاً

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \, dx = \int u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(ii) \quad \int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x} \, dx$$

الحل :

بوضع $u = x^3 + x$ فإن $du = (3x^2 + 1) dx$. إذاً

$$\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x} \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |x^3 + x| + c$$

$$(vi) \quad \int \frac{\sec^2 x}{\tan x} \, dx$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} \, dx = \int \frac{(\tan x)'}{\tan x} \, dx = \ln |\tan x| + c$$

$$(vii) \quad \int \frac{x+1}{x^2 + 2x} \, dx$$

الحل :

$$\int \frac{x+1}{x^2 + 2x} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 2x)'}{x^2 + 2x} \, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x| + c$$

=====

=====