

المحاضرة الخامسة

التكامل غير المحدد Indefinite Integral

بند (1) : الدالة المقابلة والتكامل غير المحدد :

(Antiderivative and Indefinite Integrals)

درسنا فيما سبق كيفية الحصول على المشتقة الأولى للدوال المختلفة كما درسنا التكامل المحدد. وباستخدام تعريف الدالة المقابلة فإن النظرية الأساسية للتكامل المحدد (صيغة نيوتن) أعطت صيغة بسيطة للحصول على قيمة التكامل المحدد . فيما يلي نعطي مفهوم التكامل غير المحدد .

تعريف (2.1.1) :

إذا كانت F, f دالتين معرفتين على الفترة المفتوحة $]a, b[$ وكانت F دالة قابلة للاشتقاق على هذه الفترة بحيث يكون

$$F'(x) = f(x) ; \forall x \in]a, b[$$

فإن الدالة F تسمى دالة مقابلة أو تكامل غير محدد للدالة f ونعبر عن ذلك بالرمز

$$F(x) = \int f(x) dx$$

ملاحظة (2.1.2) :

إذا كانت F دالة مقابلة للدالة f ، فإنه لكل عدد ثابت c تكون الدالة $F(x) + c$ دالة مقابلة أيضا للدالة f وذلك لأن

$$(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

ومن ثم نستنتج أن الدالة المقابلة ليست وحيدة. إذاً بصفة عامة إذا كانت F دالة مقابلة للدالة f فإن

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

حيث c ثابت إختياري يسمى بثابت التكامل .

لاحظ أنه ليس من الضروري أن نجد لكل دالة مقابلة ، ولكن إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فمن النظرية الأساسية للتكامل نجد أن الدالة

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad ; \quad \forall x \in]a, b[$$

هي دالة مقابلة للدالة f وبالتالي فإن

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

وبلاحظ من ذلك أن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{d}{dx} (F(x)) dx = F(b) - F(a)$$

فعلى سبيل المثال الدالة $\sin x$ هي الدالة المقابلة للدالة $\cos x$ لأن :

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

إذاً

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

والدالة x^3 هي الدالة المقابلة للدالة $3x^2$ لأن :

$$\frac{d}{dx} (x^3) = 3x^2$$

إذاً

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c$$

نظرية (2.1.3) : (لأي ثابت k)

$$(1) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$(2) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

البرهان :

(1) لبرهان ذلك نفاضل الطرف الأيمن بالنسبة إلى x ونجد أن :

$$\frac{d}{dx} [k \int f(x) dx] = k \frac{d}{dx} [\int f(x) dx] = k f(x)$$

ومن تعريف (2.1.1) ، فإن الدالة $k \int f(x) dx$ هي الدالة المقابلة للدالة $k f(x)$.

إذاً

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

وهذا يعنى أن تكامل داله ذات معامل ثابت يساوى المعامل الثابت مضروباً في تكامل الدالة بالنسبة إلى

x .

(2) بما أن

$$\frac{d}{dx}[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx] = \frac{d}{dx}[\int f(x) dx] \pm \frac{d}{dx}[\int g(x) dx] = f(x) \pm g(x)$$

إذاً من التعريف (2. 1. 1) نحصل على المطلوب.

وهذا القانون يوضح أن تكامل مجموع دالتين يساوى مجموع تكاملي الدالتين .

نظرية (2. 1. 4) : (قانون القوة للتكامل الغير محدد)

إذا كان r عدد حقيقي (حيث $r \neq -1$) فإن :

$$\int x^r dx = \begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} + c & ; r \neq -1 \\ \ln|x| + c & ; r = -1 \end{cases}$$

البرهان : من المعلوم أن

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{r+1}}{r+1} + c \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{r+1}}{r+1} \right) = \frac{1}{r+1} (r+1) x^r = x^r$$

وأيضاً

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$

في ضوء هذه النتيجة وباستخدام تعريف (1. 1. 1) نحصل على المطلوب.

ملاحظه (2. 1. 5) :

(1) كحالة خاصة من النظرية السابقة بوضع $r = -\frac{1}{2}$ نحصل على القانون التالى:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$$

(2) من القواعد الأساسية للتكامل نلاحظ أن $\frac{d}{dx}(\int f(x) dx) = f(x)$

باستخدام المفاهيم السابقة نستطيع الحصول على الصيغ التكاملية مباشرة باستخدام الصيغ التفاضلية

التي سبق دراستها سالفاً. ويمكن تكوين الجدول التالى:

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\operatorname{sech}^2 x$	$\tanh x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$\operatorname{csch}^2 x$	$-\coth x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\operatorname{sech} x \tanh x$	$-\operatorname{sech} x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\operatorname{csch} x \coth x$	$-\operatorname{csch} x + c$
$\tan x$	$\ln \sec x + c$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\begin{cases} \sin^{-1}(x/a) + c \\ \text{or} \\ -\cos^{-1}(x/a) + c \end{cases}$
$\cot x$	$\ln \sin x + c$	$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\begin{cases} (1/a)\tan^{-1}(x/a) + c \\ -(1/a)\cot^{-1}(x/a) + c \end{cases}$
$\sec^2 x$	$\tan x + c$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\begin{cases} \cosh^{-1}(x/a) + c \\ \text{or} \\ \ln x + \sqrt{x^2 - a^2} + c \end{cases}$
$\csc^2 x$	$-\cot x + c$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$	$-(1/a)\operatorname{csch}^{-1}(x/a) + c$
$\sec x$	$\ln \sec x + \tan x + c$	$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$(1/a)\tanh^{-1}(x/a) + c$
$\csc x$	$\begin{cases} \ln \csc x - \cot x + c \\ = -\ln \csc x + \cot x + c \end{cases}$	$\frac{1}{x^2 - a^2}$	$-(1/a)\coth^{-1}(x/a) + c$
$\sec x \tan x$	$\sec x + c$	$\coth x$	$\ln \sinh x + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\cosh x$	$\sinh x + c$	$\operatorname{sech} x$	$\tan^{-1}(\sinh x) + c$

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$	$-(1/a)\operatorname{sech}^{-1}(x/a) + c$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\left\{ \begin{array}{l} (1/a)\sec^{-1}(x/a) + c \\ \text{or} \\ -(1/a)\csc^{-1}(x/a) + c \\ \text{or} \\ (1/a)\cos^{-1}(a/x) + c \\ \text{or} \\ -(1/a)\sin^{-1}(a/x) + c \end{array} \right.$
e^x	$e^x + c$	$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$(1/a)\tanh^{-1}(x/a) + c$
$\tanh x$	$\ln \cosh x + c$	$\operatorname{csch} x$	$-\coth^{-1}(\cosh x) + c$

ملاحظة :

قواعد هامة لحساب بعض التكاملات :

في الجدول السابق وبتطبيق تعريف (2.1.1) يمكن التأكد من جميع التكاملات المعطاة ونكتفي هنا باستعراض بعض منها .

$$(1) \text{ بصفة عامة نعلم أن } (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ ، إذن يكون}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c}$$

وكحالة خاصة

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

بالمثل

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$$

كذلك لاحظ أن

$$\sec x = \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} = \frac{(\sec x + \tan x)'}{\sec x + \tan x}$$

ويكون

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$$

بالمثل يمكن ملاحظة أن

$$\int \csc x \, dx = -\int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} \, dx = -\ln |\csc x + \cot x| + c$$

(2) من المعلوم أن

$$(\tan^{-1} f(x))' = \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}$$

إذن

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} \, dx = \tan^{-1} f(x) + c}$$

من هذه القاعدة نلاحظ أن

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh x}{1 + \sinh^2 x} = \frac{(\sinh x)'}{1 + \sinh^2 x}$$

$$\therefore \int \operatorname{sech} x \, dx = \tan^{-1}(\sinh x) + c$$

(3) أيضا من المعلوم أن

$$(e^{f(x)})' = f'(x) e^{f(x)}$$

إذن

$$\boxed{\int e^{f(x)} f'(x) \, dx = e^{f(x)} + c}$$

(4) حيث أن

$$(f^n(x))' = n f^{n-1}(x) f'(x)$$

إذن

$$\boxed{\int f^n(x) f'(x) \, dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c, \quad n \neq -1}$$

(5) حيث أن

$$(a^{f(x)})' = a^{f(x)} f'(x) \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

فيكون إذن

$$\boxed{\int a^{f(x)} f'(x) \, dx = \frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + c}$$

مثال (2.1.6) : لاحظ أن

$$(i) \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$(ii) \int (8t^3 - 6\sqrt{t} + \frac{1}{t^2}) dt = 8 \int t^3 dt - 6 \int t^{\frac{1}{2}} dt + \int t^{-2} dt \\ = 8 \frac{t^4}{4} - 6 \times \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{t^{-1}}{-1} + c = 2t^4 - 4t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{t} + c$$

$$(iii) \int 3x dx = 3 \int x dx = 3 \frac{x^2}{2} + c = \frac{3}{2} x^2 + c$$

$$(iv) \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{-1}{2x^2} + c$$

$$(v) \int (\sqrt{x} + 1) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x + c$$

$$(vi) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx \\ = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + c$$

$$(vii) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$(viii) \int (\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\cos x + 3\sec x \tan x) dx \\ = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 3 \int \cos x dx + 3 \int \sec x \tan x dx \\ = \sqrt{x} - 3 \sin x + 3 \sec x + c$$

$$(ix) \int (\sqrt{x} - \frac{1}{x})^2 dx = \int (x - \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x^2}) dx \\ = \int x dx - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int x^{-2} dx = \frac{1}{2} x^2 - 4\sqrt{x} - \frac{1}{x} + c$$

بعض التكاملات المثلثية :

فيما يلي نذكر بعض المتطابقات المثلثية الهامة التي تساعد في إيجاد تكامل مربعات الدوال المثلثية :

$$(1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(2) \tan^2 x + 1 = \sec^2 x ; \forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \cot^2 x + 1 = \csc^2 x ; \forall x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$(4) \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(5) \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(6) \sin 2x = 2 \sin x \cos x ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(7) \sin x \cos y = \frac{1}{2} \{ \sin(x - y) + \sin(x + y) \}$$

$$(8) \sin x \sin y = \frac{1}{2} \{ \cos(x - y) - \cos(x + y) \}$$

$$(9) \cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x - y) + \cos(x + y) \}$$

مثال (2.3.5) : أوجد التكاملات التالية :

$$(i) \int \sin^2 x \, dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \\ &= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + c \end{aligned}$$

$$(ii) \int \cos^2 x \, dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \\ &= \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c \end{aligned}$$

$$(iii) \int \tan^2 x \, dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \int (\sec^2 x) \, dx - \int dx \\ &= \tan x - x + c \end{aligned}$$

$$(iv) \int \cot^2 x \, dx$$

الحل :

$$\int \cot^2 x \, dx = \int (\csc^2 x - 1) \, dx = -\cot x - x + c$$

$$(v) \int \sec^2 x \, dx$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

الحل :

$$(vi) \int \csc^2 x \, dx$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

الحل :

مثال (2.3.6) :

$$\int \sin 5x \cos 7x \, dx$$

احسب

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \cos 7x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(5x - 7x) + \sin(5x + 7x)] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int [\sin 12x - \sin 2x] \, dx \\ &= -\frac{1}{24} \cos 12x + \frac{1}{4} \cos 2x + c \end{aligned}$$

وبنفس الأسلوب ومن المتطابقات المثلثية السابقة (7) ، (8) ، (9) يمكن حساب أي من التكاملات الآتية :

$$\int \sin mx \cos nx \, dx , \int \sin mx \sin nx \, dx , \int \cos mx \cos nx \, dx$$

تعريف (2.1.7) : المعادلة التفاضلية (Differential Equation)

المعادلة التفاضلية في متغيرين x, y هي معادله تحتوي على المتغيرين x, y وتفاضلات y بالنسبة إلى x . فالمعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى في x, y توضع في الصورة العامة :

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

فعلى سبيل المثال المعادلات:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1 ; \frac{dy}{dx} = x^2 + 1 \text{ \& } \frac{dy}{dx} = 3x$$

هي معادلات تفاضلية بسيطة من الدرجة الأولى.

حل المعادلة التفاضلية هو إيجاد دالة $y = h(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة.

المثال التالي يوضح كيفية إيجاد الحل لبعض المعادلات التفاضلية البسيطة من الدرجة الأولى والقابلة لفصل المتغيرات في x, y . فإذا كان لدينا المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى على الصورة العامة التالية :

$$f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy = 0$$

وأمكن وضعها على الصورة :

$$F(x) \, dx + G(y) \, dy = 0$$

فإنه بتكامل الطرفين نحصل على حل المعادلة التفاضلية وهذه الفكرة تسمى حل المعادلات التفاضلية القابلة لفصل المتغيرات . الحل الناتج يسمى بالحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

مثال (2.1.8) : أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

(i) $\frac{dy}{dx} = 2$

الحل :

حيث أن $\frac{dy}{dx} = 2$. بوضع المعادلة في صورة فصل المتغيرات نجد أن $dy = 2 dx$ إذا بتكامل الطرفين نحصل على :

(حيث c ثابت إختياري) $\int dy = 2 \int dx \Rightarrow y = 2x + c$
إذاً $y = 2x + c$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

(ii) $\frac{dy}{dx} = 3x$

الحل :

بما أن $\frac{dy}{dx} = 3x$ إذاً بفصل المتغيرات وتكامل الطرفين نحصل على :

(حيث c ثابت إختياري) $\int dy = \int 3x dx \Rightarrow y = \frac{3}{2}x^2 + c$
إذاً $y = \frac{3}{2}x^2 + c$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة .

(iii) $\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$

الحل :

المعادلة التفاضلية المعطاة تأخذ الصورة $dy = (x^2 + 1) dx$. إذاً بتكامل الطرفين نحصل على :

$$\int dy = \int (x^2 + 1) dx \Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + x + c$$

إذاً $y = \frac{x^3}{3} + x + c$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة حيث c ثابت إختياري.

=====

=====