

المحاضرة الرابعة

بند (2) :الدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية

Logarithmic and Exponential Functions

تعريف (1.2.1) : Definition of the Logarithmic Function

حيث أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ متصلة على الفترة $]0, \infty[$ ، نعرف الدالة اللوغاريتمية، رمزا $\ln x$ ، بأنها

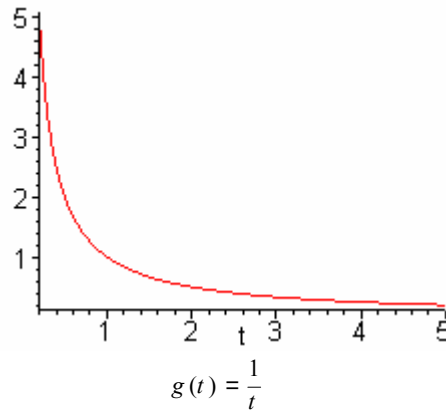
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \forall x \in]0, \infty[$$

أي أن الدالة اللوغاريتمية $\ln x$ هي الدالة المقابلة للدالة $\frac{1}{x}$ في الفترة $]0, \infty[$.

التعريف السابق يعني أنه إذا كانت $x \geq 1$ فإن $\ln x$ تعبر عن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $g(t) = \frac{1}{t}$ والمحور الأفقي والخطين المستقيمين $t = 1, t = x$.

أما إذا كانت $0 < x < 1$ فإن $\ln x$ تعبر عن سالب المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $g(t) = \frac{1}{t}$ والمحور الأفقي والخطين المستقيمين $t = 1, t = x$ أي أن

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt$$



خواص الدالة اللوغاريتمية : Properties of the Logarithmic Function

1- من التعريف ينتج مباشرة أن :

$$(أ) \quad \ln 1 = 0$$

$$(ب) \quad \ln x > 0 \text{ إذا كانت } x > 1$$

$$(ج) \quad \ln x < 0 \text{ إذا كانت } 0 < x < 1$$

2- من النظرية الأساسية للتحليل نستنتج أن الدالة اللوغاريتمية دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على الفترة $]0, \infty[$ وأن :

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in]0, \infty[$$

3 - من الخاصية السابقة نستنتج مباشرة أن الدالة $f(x) = \ln(x)$ تزايدية على الفترة $]0, \infty[$ وبالتالي فإنها تناظر أحادي من $]0, \infty[$ إلى $\mathbb{R}$.

4 - لكل $a, b \in]0, \infty[$ يكون $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ولبرهان ذلك :

نعتبر الدالة $f(x) = \ln(ax)$ ونستخدم قاعدة السلسلة وخاصية (2) كآلي :

$$\frac{d}{dx}(\ln(ax) - \ln x) = \frac{1}{ax} \cdot a - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

وينتج من ذلك أن

$$\ln(ax) - \ln x = c$$

حيث c مقدار ثابت لا يعتمد على x . لتحديد قيمة c نضع $x = 1$ في المعادلة السابقة فينتج أن $c = \ln a$.

إذن

$$\ln(ax) - \ln x = \ln a$$

ويكون

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

وبوضع $b = x$ ينتج أن $\ln ab = \ln a + \ln b$.

5 - لكل $x \in]0, \infty[$ يكون $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$. لتوضيح ذلك نلاحظ أنه لكل $x \in]0, \infty[$ يكون

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t} dt$$

نضع $y = \frac{1}{t}$. إذن $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t^2}$. أي أن $dt = -t^2 dy$ ويكون

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x -\frac{1}{y} dy = -\int_1^x \frac{1}{y} dy = -\ln x$$

6 - لكل $x, y \in]0, \infty[$ يكون $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$. لتوضيح ذلك لدينا ما يلي :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

7 - إذا كان n عدداً نسبياً فإن $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

لتوضيح ذلك نستخدم قاعدة السلسلة كما يأتي :

$$\frac{d}{dx} [\ln(x^n) - n \ln(x)] = \frac{d}{dx} (\ln(x^n)) - \frac{n}{x} = \frac{1}{x^n} \cdot (nx^{n-1}) - \frac{n}{x} = \frac{n}{x} - \frac{n}{x} = 0$$

وينتج أن $\ln(x^n) - n \ln(x) = c$

حيث c مقدار ثابت لا يعتمد على x . بوضع $x = 1$ في المعادلة السابقة ينتج أن $c = 0$. إذن

$$\ln(x^n) = n \ln(x)$$

8 - لرسم منحنى الدالة $f(x) = \ln x$ نستخدم تعريف ريمان للتكامل في إيجاد قيمة هذه الدالة عند

بعض القيم ثم نستخدم الخواص السابقة في إيجاد قيمتها عند نقط أخرى ، فمثلا يستطيع الطالب أن يجد بطريقة ريمان أن

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = 0.6931 \quad , \quad \ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{t} dt = 1.0986 \quad , \quad \ln 4 = \int_1^4 \frac{1}{t} dt = 1.3863$$

وباستخدام الخواص السابقة يكون لدينا

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 = -0.6931 \quad , \quad \ln(4) = \ln(2^2) = 2 \ln 2 \quad , \quad \ln(2^n) = n(\ln 2)$$

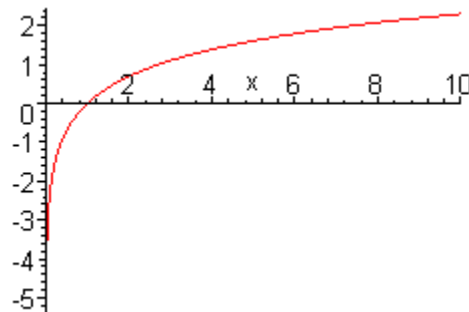
$$\ln(3^n) = n(\ln 3) \quad , \quad \ln(4^n) = n(\ln 4) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

بهذا الأسلوب نستطيع أن نحدد قيمة الدالة اللوغاريتمية عند عدد غير منته من الأعداد الحقيقية الموجبة .

نلاحظ كذلك أن $\frac{d^2}{dx^2}(\ln x) = -\frac{1}{x^2}$ أي أن المشتقة الثانية دائماً سالبة ، ونستنتج من ذلك أن

منحنى الدالة اللوغاريتمية مقعر لأسفل ، كما نلاحظ أن

من ذلك نستطيع أن نتبين أن منحنى هذه الدالة $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$



يكون علي الصورة التالية :

$$f(x) = \ln x$$

الآن بما أن الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \ln x$ دالة تناظر أحادي فإننا نستطيع أن نقدم التعريف الآتي:

تعريف (2.1.2) : نُعرف العدد الحقيقي الذي تكون قيمة الدالة اللوغاريتمية عنده تساوي 1 بالأساس الطبيعي ونرمز له بالرمز e . أي أن :

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1 \quad (*)$$

من المفيد معرفة أنه إذا قمنا برسم منحنى الدالة $f(x) = \ln x$ بصورة دقيقة لوجدنا أن $e \approx 2.71828$.

نسمي الدالة $f(x) = \ln x$ بالدالة اللوغاريتمية للأساس الطبيعي e وتكتب في بعض الأحيان علي الصورة $\log_e x$ أي أن :

$$\log_e x := \ln x$$

إذن

$$\log_e x = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

مما سبق نستنتج أن الدالة $f(x) = \log_e x$ هي تناظر أحادي من $]0, \infty[$ إلى $\mathbb{R}$ كما أنها دالة قابلة للاشتقاق على هذه الفترة وأن مشتقتها هي

$$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

بالتالي يكون لهذه الدالة دالة عكسية $]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} : f^{-1}$ متصلة وقابلة للاشتقاق ونستطيع أن نقدم التعريف الآتي :

تعريف (3.2.1) : نسمى معكوس الدالة اللوغاريتمية للأساس الطبيعي e بالدالة الأسية للأساس e ونرمز لها بالرمز e^x . أي أن

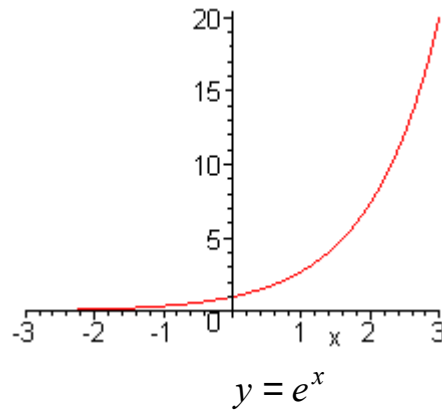
$$y = \log_e x = \ln x \leftrightarrow x = e^y$$

من هذا التعريف يتبين لنا أن الدالة الأسية $y = e^x$ معرفة على $\mathbb{R}$ وتأخذ جميع قيمها في الفترة $]0, \infty[$ كما أنها دالة متصلة وقابلة للاشتقاق ولإيجاد هذه المشتقة نستخدم قانون مشتقة الدالة العكسية فيكون:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)} = y = e^x$$

الآن حيث أن الدالة اللوغاريتمية للأساس الطبيعي تزايدية علي الفترة $]0, \infty[$ ، إذن الدالة الأسية للأساس الطبيعي e^x تزايدية كذلك علي $\mathbb{R}$.

بصفة عامة من منحنى الدالة $\log_e x = \ln x$ يتبين لنا أن منحنى الدالة $y = e^x$ هو كالآتي :-

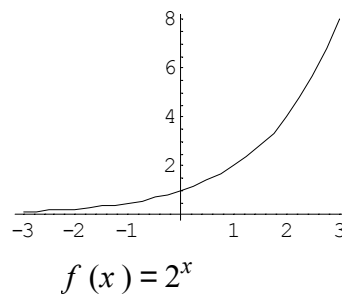
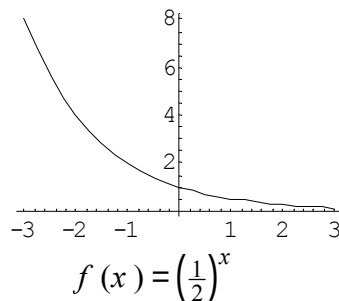


في التعريف الآتي نعطي مفهوم الدالة الأسية لأي أساس حقيقي موجب .

تعريف (1.2.4) : ليكن a عدداً حقيقياً موجباً ولا يساوي الواحد الصحيح. نُعرف الدالة الأسية للأساس a كالآتي:

$$y = a^x = e^{x \ln a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

الآن بما أن الدالة الأسية للأساس الطبيعي هي دالة تزايدية وتقابل من $\mathbb{R}$ إلى $]0, \infty[$ ، فإن الدالة $y = e^{x \ln a}$ تكون هي أيضاً تزايدية عندما $a > 1$ (تناقصية عندما $0 < a < 1$) كما هو موضح علي الرسم لبعض الاختيارات للثابت a :



وبالتالي تقابل ويكون لها دالة عكسية معرفة على $]0, \infty[$ نسميها الدالة اللوغاريتمية للأساس a ونرمز لها بالرمز $\log_a x$.

أي أن $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ ، $x \in \mathbb{R}$ ، $y \in]0, \infty[$

باستخدام قاعدة السلسلة يتبين لنا بسهولة أن

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

إذن

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0}$$

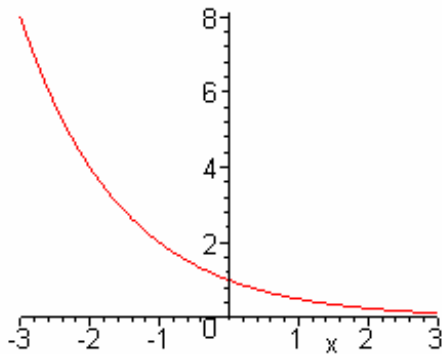
ويمكن استنتاج الآتي

$$y = \log_a x \Rightarrow x = a^y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = a^y \ln a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

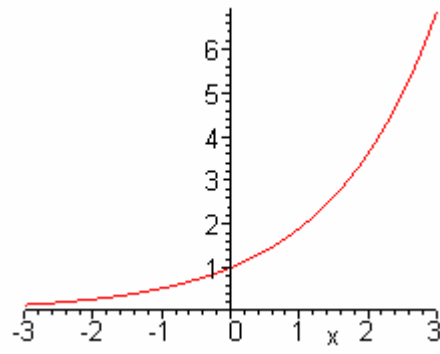
وبالتالي يكون

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}, \quad x > 0, \quad a > 0}$$

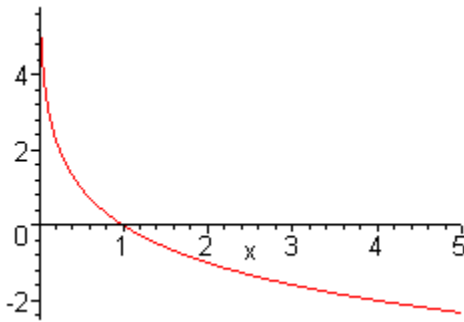
باستخدام المعادلة (**) ومن ثم (***) نستطيع مستعينين بمنحنى الدالة الأسية e^x أن نرسم منحنى كل من الدالتين $\log_a x$ ، a^x حيث $a > 0$ ، $a \neq 1$ ، وعلى العموم منحنى هاتين الدالتين يرسم كما يلي :



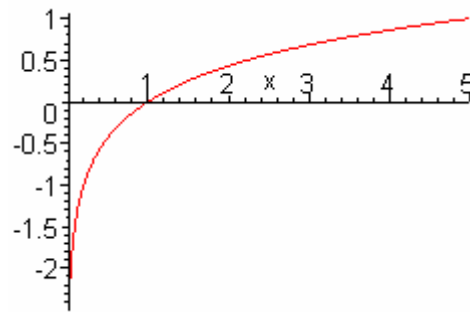
$$f(x) = a^x, \quad a < 1$$



$$f(x) = a^x, \quad a > 1$$



$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$$



$$f(x) = \log_a x, \quad a > 1$$

وقد سبق إعطاء أمثلة كافية على مشتقة الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية في مقرر ر 131 فعلي الطالب الرجوع إليه لتذكر بعض الأساسيات في هذا الموضوع.

بند (3) : الدوال الزائدية : (Hyperbolic functions)

إنطلاقاً من تعريف الدالة الأسية يمكن تعريف مجموعة جديدة من الدوال والتي تعرف بالدوال الزائدية سنلقي الضوء عليها وعلي بعض خصائصها.

تعريف (1.3.1) : تسمى الدالة $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ والمعرفة بالقاعدة بدالة الجيب الزائدي للعدد x ونرمز لها بالرمز $\sinh x$ وتسمى الدالة $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ والمعرفة بالقاعدة $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ بجيب التمام الزائدي ونرمز لها بالرمز $\cosh x$ ، أي أن :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

وبلاحظ من التعريف السابق مباشرة أن الدالة $\cosh x$ تحقق ما يلي:

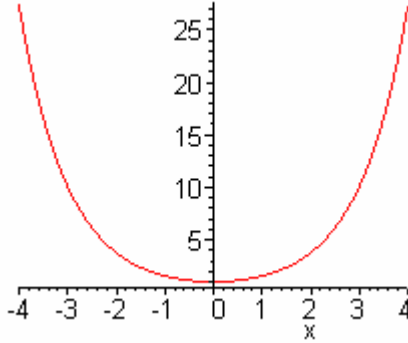
- (1) $\cosh x$ دالة زوجية على $\mathbb{R}$.
- (2) $\cosh 0 = 1$.
- (3) $\cosh x$ مدي $\cosh x \geq 1$ لأن $[1, \infty[$ هو الفترة (لاحظ أن $\forall a > 0, a + \frac{1}{a} \geq 2$) .

بينما نجد أن الدالة $\sinh x$ تحقق ما يلي:

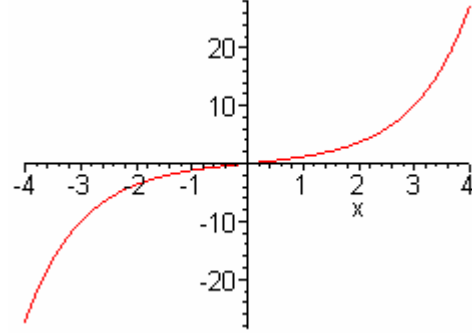
- (1) $\sinh x$ دالة فردية على $\mathbb{R}$.
- (2) $\sinh 0 = 0$ ، $\sinh x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (3) $\sinh x$ مدي $\mathbb{R}$.
- (4) الدالة $\sinh x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تناظر أحادي .

(5) ونترك للطلاب كتمرين التحقق من الخصائص السابقة.

ومنحنى الدالتين كما هو موضح أدناه :



$$f(x) = \cosh x$$



$$f(x) = \sinh x$$

كما يلاحظ من التعريف السابق أنه يمكن استنتاج أن $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ، وبرهان ذلك كالآتي :

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4} (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

وبنفس الكيفية وباستخدام التعريف يمكن إثبات المتطابقات التالية :

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

تعريف (2.3.1) :

نعرف الظل الزائدي $\tanh x$ وظل التمام الزائدي $\coth x$ والقاطع الزائدي $\operatorname{sech} x$ وقاطع التمام

الزائدي $\operatorname{csch} x$ على النحو التالي :

$$\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} , & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} , & \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} \end{aligned}$$

ويمكن إثبات المتطابقات الآتية :

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} ; \quad \tanh x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x ; \quad \operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x - 1$$

ملاحظة هامة (3.3.1) :

أي متطابقة صحيحة للدوال المثلثية تكون صحيحة أيضا للدوال الزائدية المناظرة إذا غيرنا إشارة الحد الذي يحتوي على $\sinh^2 x$ أو $\sinh x \sinh y$ صراحة أو ضمنا مثل $\tanh^2 x$ ، $\coth^2 x$ ، $\operatorname{csch}^2 x$ ،

مشتقة الدوال الزائدية:

أمثلة (4.3.1) : أوجد المشتقة الأولى للدوال الزائدية الآتية :

(i) $y = \sinh x$

الحل :

$$y' = \frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

أي أن

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x}$$

(ii) $y = \cosh x$

الحل :

بنفس طريقة المثال السابق نجد أن :

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x}$$

(iii) $y = \tanh x$

الحل :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

إذن يكون

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x}$$

(iv) $y = \coth x$

الحل :

بنفس طريقة المثال السابق نجد أن :

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x}$$

(v) $y = \operatorname{sech} x$

الحل :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx} (\operatorname{sech} x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cosh x} \right) = \frac{-1}{\cosh^2 x} \sinh x \\ &= -\frac{1}{\cosh x} \frac{\sinh x}{\cosh x} = -\operatorname{sech} x \tanh x \end{aligned}$$

أي أن

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x}$$

(vi) $y = \operatorname{csch} x$

الحل :

بنفس طريقة المثال السابق نجد أن :

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x}$$

ملاحظة (5.3.1) :

باستخدام مفهوم دالة الدالة يمكن إثبات أن :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\sinh f(x)) &= (\cosh f(x)) f'(x) \\ \frac{d}{dx} (\cosh f(x)) &= (\sinh f(x)) f'(x) \\ \frac{d}{dx} (\tanh f(x)) &= (\operatorname{sech}^2 f(x)) f'(x) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth f(x)) = -(\operatorname{csch}^2 f(x))f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} f(x)) = -(\operatorname{sech} f(x) \tanh f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} f(x)) = -(\operatorname{csch} f(x) \coth f(x))f'(x)$$

أمثلة (6.3.1) :

أوجد y' للدوال :

(i) $y = \arctan \sqrt{x} + \sinh 2x$

الحل :

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \cosh 2x = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} + 2 \cosh 2x$$

(ii) $y = e^{2 \sin e} + 3^{\tan x} + \tanh x^2$

الحل :

$$y' = 0 + 3^{\tan x} \sec^2 x \ln 3 + (\operatorname{sech}^2 x^2)(2x)$$

$$\therefore y' = 3^{\tan x} \sec^2 x \ln 3 + 2x \operatorname{sech}^2 x^2$$

مشتقات الدوال الزائدية العكسية

The Derivatives of the Inverse Hyperbolic Functions

من دراستنا السابقة للدوال الزائدية لاحظنا أن البعض منها تناظر أحادي وبالتالي يكون لها دالة عكسية والبعض الآخر ليس تناظر أحادي ويمكن إعادة اختيار النطاق والنطاق المصاحب لتصبح لها دوال عكسية.

أمثلة (7.3.1) :

أوجد y' للدوال الزائدية العكسية الآتية :

(i) $y = \sinh^{-1} x$

الحل :

من الواضح أن $x = \sinh y$. إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

أي أن

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$(ii) \quad y = \cosh^{-1} x \quad ; \quad |x| \geq 1$$

الحل :

بنفس طريقة المثال السابق نجد أن :

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| \geq 1}$$

$$(iii) \quad y = \tanh^{-1} x \quad ; \quad |x| < 1$$

الحل :

من الواضح أن $x = \tanh y$. إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

أي أن

$$\boxed{\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1}$$

$$(iv) \quad y = \coth^{-1} x \quad ; \quad |x| > 1$$

الحل :

بنفس طريقة المثال السابق نجد أن :

$$\boxed{\frac{d}{dx} \coth^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| > 1}$$

$$(v) \quad y = \operatorname{sech}^{-1} x \quad ; \quad 0 < x < 1$$

الحل :

من الواضح أن $x = \operatorname{sech} y$. إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{-\operatorname{sech} y \tanh y} = \frac{-1}{\operatorname{sech} y \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 y}} = \frac{-1}{x \sqrt{1 - x^2}}$$

أي أن

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{-1}{x \sqrt{1-x^2}} ; \quad 0 < x < 1$$

$$(vi) \quad y = \operatorname{csch}^{-1} x \quad ; \quad x \neq 0$$

الحل :

بنفس طريقة المثال السابق مع ملاحظة أن الدالة $y = \operatorname{csch}^{-1} x$ تناقصية لأن دالتها العكسية $x = \operatorname{csch} y$ تناقصية نجد أن :

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} x = \frac{-1}{|x| \sqrt{1+x^2}} , \quad x \neq 0$$

ملاحظة (8.3.1) :

باستخدام مفهوم دالة الدالة يمكن إثبات أن :

$$\frac{d}{dx} (\sinh^{-1} f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}}$$

$$\frac{d}{dx} (\cosh^{-1} f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx} (\tanh^{-1} f(x)) = \frac{f'(x)}{1-(f(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx} (\coth^{-1} f(x)) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2 - 1}$$

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{sech}^{-1} f(x)) = \frac{-f'(x)}{f(x) \sqrt{1-(f(x))^2}}$$

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{csch}^{-1} f(x)) = \frac{-1}{|f(x)| \sqrt{1+f^2(x)}} f'(x)$$

ويجدر بالذكر أنه يمكن التعبير عن الدوال الزائدية في الصور التالية باستخدام الدالة اللوغاريتمية:

النطاق	الدالة
$] -\infty, \infty[$	$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$[1, \infty[$	$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
$] -1, 1[$	$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$
$] -\infty, -1[\cup] 1, \infty[$	$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$
$] 0, 1]$	$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$
$] -\infty, 0[\cup] 0, \infty[$	$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{ x } \right)$

ويمكن إثبات واحدة من هذه العلاقات ولتكن $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ويكون الباقي بالمثل ويترك تمرين للطالب :

ضع $y = \sinh^{-1} x$ فيكون إذن $x = \sinh y$ ، أي أن $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ ومنها ينتج أن $2x = e^y - e^{-y}$ ، وبوضع $t = e^y$ تنتج المعادلة $t^2 - 2xt - 1 = 0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية في المتغير t وحليها

$$t = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

هما

وحيث أن $t = e^y$ موجبة دائماً فالإشارة السالبة مرفوضة ويكون إذن

$$t = e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

ومعلوم أن الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية كلاهما عكسية للأخرى (أو بأخذ لوغاريتم الطرفين) ينتج أن :

$$y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

تمرين : حاول إثبات بقية العلاقات المذكورة في الجدول أعلاه.

أمثلة (1.3.9) : أوجد y' للدوال :

$$(i) \quad y = \tanh^{-1} x^2 + \frac{1}{3} \sinh^{-1} x^3$$

: الحل

$$y' = \frac{2x}{1-(x^2)^2} + \frac{1}{3} \frac{3x^2}{\sqrt{1+(x^3)^2}} = \frac{2x}{1-x^4} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}$$

$$(ii) \quad y = \operatorname{sech}^{-1} \sqrt{x} - \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{6}}$$

: الحل

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-1}{\sqrt{x} \sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - (1/6) \left(x/2 \right)^{\frac{1}{6}-1} (1/2) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x \sqrt{1-x}} + \frac{1}{6} (2/x)^{\frac{5}{6}} \right) \end{aligned}$$

=====

=====