

المحاضرة الثالثة

خواص التكامل المحدد : (Properties of the Definite Integral)

نظرية (26.1.1) :

إذا كانت f, g دالتين قابلتين للتكامل المحدد على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، وكان c مقدار ثابت فإن :

$$(i) \quad \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(ii) \quad \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$(iii) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx ; (d \in [a, b])$$

$$(iv) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$(v) \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

(vi) إذا كان $f(x) \leq g(x)$ لجميع قيم $x \in [a, b]$ ، فإن

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

(vii) إذا كان m, M عددين حقيقيين بحيث أن:

$$m \leq f(x) \leq M , \quad \forall x \in [a, b]$$

فإن

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

البهرهان :

يأتي مباشرة باستخدام تعريف التكامل المحدد ويترك للقارئ كتمرين.

نتيجة (27.1.1) : إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة المغلقة $[-a, a]$ فإنه :

(1) إذا كانت الدالة f دالة فردية على الفترة المغلقة $[-a, a]$ فإن :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

(2) إذا كانت الدالة f دالة زوجية على الفترة المغلقة $[-a, a]$ فإن :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

البهرهان :

باستخدام الخاصيتان (iv) ، (iii) من نظرية (26.1.1) ينتج المطلوب.

أمثلة (1.1.28) :

احسب التكاملات التالية :

$$(i) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \quad (ii) \int_{-5}^5 x^3 dx \quad , \quad (iii) \int_{-2\pi}^{2\pi} (\sin 3x \cos x + \sin x \cos x) dx$$

الحل :

حيث أن كلاً من الدوال

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = x^3 \quad \& \quad h(x) = \sin 3x \cos x + \sin x \cos x$$

دالة فردية (تحقق من ذلك) ، إذن يكون :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0 \quad ; \quad \int_{-5}^5 x^3 dx = 0 \quad ; \quad \int_{-2\pi}^{2\pi} (\sin 3x \cos x + \sin x \cos x) dx = 0$$

$$(iv) \int_{-2}^2 x^2 dx$$

الحل :

$$\int_{-2}^2 x^2 dx = 2 \int_0^2 x^2 dx \quad \text{حيث أن الدالة } f(x) = x^2 \text{ دالة زوجية ، إذاً}$$

وبما أن

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \quad \text{((مثال 1.1.25))}$$

إذن

$$\int_{-2}^2 x^2 dx = 2 \left(\int_0^2 x^2 dx \right) = 2 \left(\frac{1}{3} [2^3 - 0^3] \right) = \frac{16}{3}$$

$$(v) \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

الحل : من خصائص التكامل المحدد يكون

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = (-1) \int_1^3 x^2 dx + 4 \int_1^3 x dx - 3 \int_1^3 dx$$

وبالتالي

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \frac{-1}{3}(3^3 - 1^3) + \frac{4}{2}(3^2 - 1^2) - 3(3 - 1) = -\frac{26}{3} + 16 - 6 = \frac{4}{3}$$

نظرية (1.1.29) : (نظرية القيمة المتوسطة للتكامل)

(Mean Value Theorem For Integration)

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإنه يوجد نقطة $\xi \in [a, b]$ بحيث يكون :

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi)$$

البرهان :

حيث أن f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإنها تصل إلى قيمتها العظمى M وقيمها الصغرى m في هذه الفترة ويكون

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$

ومن (vii) نظرية (1.1.26) نجد أن:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq M$$

أي أن

وحيث أن $R_f = [m, M]$ ، دالة متصلة فإنها تأخذ جميع القيم بين هاتين القيمتين m ، M أي أنه يوجد عدد ξ ، $a \leq \xi \leq b$ بحيث يكون :

$$(b - a) f(\xi) = \int_a^b f(x) dx$$

مثال (1.1.30) : حقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = x + 1$ على الفترة المغلقة $[-1, 2]$.

الحل : حيث أن الدالة $f(x) = x + 1$ متصلة على الفترة المغلقة $[-1, 2]$ ، إذاً فهي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للتكامل. ومما تقدم نجد أن

$$\int_{-1}^2 (x + 1) dx = \frac{9}{2} \quad \text{(مثال (1.1.25))}$$

إذن يوجد نقطة $\xi \in [-1, 2]$ بحيث يكون

$$\int_{-1}^2 (x + 1) dx = (2 - (-1)) f(\xi)$$

$$\frac{9}{2} = (2 - (-1)) (\xi + 1) \quad \text{أي أن} \quad \xi = \frac{1}{2} \quad \text{وينتج أن} \quad \xi = \frac{1}{2}$$

نظرية (1.1.31) : (النظرية الأساسية للتحليل (I))

(The Fundamental Theorem of Analysis (I))

لتكن f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وكانت $x \in [a, b]$ ، وعرفنا الدالة :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

إذاً الدالة F تكون متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $]a, b[$ ومشتقتها تعطى بالعلاقة

$$F'(x) = f(x) , \forall x \in]a, b[$$

البرهان :

نفرض أن $x \in]a, b[$ ، إذاً لأي $x \in [x_o, b]$ (بالمثل يمكن اعتبار الحالة $x \in [a, x_o]$) يكون

$$\frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} = \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_o} f(t) dt}{x - x_o} = \frac{1}{x - x_o} \int_{x_o}^x f(t) dt$$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة f على الفترة $[x_o, x]$ ، فإنه يوجد نقطة $\xi \in [x_o, x]$ بحيث يكون

$$\int_{x_o}^x f(t) dt = f(\xi)(x - x_o)$$

وبالتالي

$$\frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} = f(\xi)$$

إذاً

$$\left| \frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} - f(x_o) \right| = |f(\xi) - f(x_o)|$$

وحيث أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ينتج أن

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(\xi) = f(x_o)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} = f(x_o) \quad \text{ويكون}$$

أي أن $F'(x_o) = f(x_o)$. وحيث أن x_o نقطة اختيارية من $]a, b[$ ، ينتج أن

$$F'(x) = f(x) ; \forall x \in]a, b[$$

وهو المطلوب.

النظرية التالية تسمى النظرية الأساسية للتحليل (II) ويطلق عليها أيضاً صيغة نيوتن للتكامل المحدد وذلك نسبة إلى العالم

إيزاك نيوتن (Isaac Newton)

نظرية (32.1.1) : (النظرية الأساسية للتحليل (II))

(The Fundamental Theorem of Analysis (II))

إذا كانت الدالة f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وكانت الدالة F متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $]a, b[$ بحيث أن :

$$F'(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in]a, b[$$

إذاً

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \dots \quad (1.13)$$

البرهان :

نعتبر التجزئة $D_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ للفترة $[a, b]$ ، وحيث أن

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

إذاً من نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة ينتج أن

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

وعليه فإن

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

وحيث أن الدالة f متصلة على $[a, b]$ إذاً فهي قابلة للتكامل على هذه الفترة . بأخذ نهاية الطرفين في العلاقة السابقة عندما $|D_n| \rightarrow 0$ ينتج أن :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

ملاحظة (33.1.1) :

إذا كانت $x \in [a, b]$ فإنه يمكن كتابة العلاقة (1.13) على الصورة :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

حيث c مقدار ثابت .

وتسمى الدالة F بالتكامل غير المحدد (indefinite Integral) للدالة f أو الدالة المقابلة

(Antiderivative) للدالة f وعليه يكون التكامل غير المحدد (الدالة المقابلة) للدالة f هو أي دالة F تحقق العلاقة:

$$F'(x) = f(x)$$

وسنرمز للتكامل غير المحدد للدالة f بالرمز $\int f(x) dx$.

مثال (1.1.34) : إذا كانت $F(x) = x^3 - 6$ هي الدالة المقابلة للدالة $f(x) = 3x^2$ ، فاحسب قيمة $\int_0^3 f(x) dx$.

الحل : حيث أن $F(3) = 3^3 - 6 = 21$; $F(0) = 0 - 6 = -6$
إذا باستخدام نظرية (1.1.32) نحصل على :

$$\int_0^3 3x^2 dx = F(3) - F(0) = 21 - (-6) = 27$$

ملاحظة (1.1.35) :

(1) إذا وجدت دالة مقابلة F للدالة f فيمكن إيجاد التكامل المحدد للدالة f مباشرة بدون استخدام تجميعات ريمان لأن

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

(2) عند تطبيق النظرية الأساسية للتحليل (صيغة نيوتن) سوف تكتب الصيغة التالية:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

فعلى سبيل المثال لحساب قيمة التكامل المحدد $\int_1^2 x^2 dx$ يمكن أن نكتب

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{1}{3} (8 - 1) = \frac{7}{3}$$

وعامة الدالة $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ تكون دالة مقابلة للدالة $f(x) = x^\alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$ (تحقق من ذلك؟)

(3) إذا لم نكتب الحد العلوى و الحد السفلى للتكامل فإنه يسمى في هذه الحالة تكامل غير محدد (أو غير معين) وعليه نضع $\int f(x) dx = F(x) + c$

(4) عند استخدام صيغة نيوتن ليس من الضرورة إضافة ثابت لتأثير التكامل لأن

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x) + c]_a^b = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

مثال (1.1.36) :

باستخدام النظرية الأساسية للتحليل (صيغة نيوتن) احسب قيمة التكاملات الآتية:

$$(i) \int_0^{\pi/2} \cos x dx$$

الحل :

واضح أن الدالة $F(x) = \sin x$ دالة مقابلة للدالة $\cos x$ وعليه فإن :

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

$$(ii) \quad \int_1^3 x^3 dx$$

الحل :

الدالة $F(x) = \frac{x^4}{4}$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = x^3$ وعليه فإن :

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \frac{1}{4}(3^4 - 1^4) = \frac{1}{4}(80) = 20$$

$$(iii) \quad \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) \, dx &= -\int_1^3 x^2 dx + 4\int_1^3 x dx - 3\int_1^3 dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 + 4\left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 - 3[x]_1^3 \\ &= -\frac{1}{3}(3^3 - 1^3) + 2(3^2 - 1^2) - 3(3 - 1) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$(iv) \quad \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

الحل :

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2$$

$$(v) \quad \int_{-2}^3 (6x^2 - 5) dx$$

الحل :

$$\int_{-2}^3 (6x^2 - 5) \, dx = \left[6\frac{x^3}{3} - 5x \right]_{-2}^3 = [(2)3^3 - 5(3)] - [2(-2)^3 - 5(-2)] = 45$$

=====

=====