

التكامل المحدد : (Definite Integral)

تعريفه (10.1.1) :

في التعريف السابق (8.1.1) إذا كانت النهاية $\lim_{|D_n| \rightarrow 0} \sigma(f; D_n)$ موجودة ولا تعتمد على التقسيم ولا على اختيار النقط ξ_k في الفترات $[x_{k-1}, x_k]$ لجميع قيم $k = 1, 2, \dots, n$ فإن هذه النهاية تعرف على أنها التكامل المحدد للدالة f على الفترة $[a, b]$ ويرمز له بالرمز

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{|D_n| \rightarrow 0} \sigma(f; D_n) \quad \dots \quad (1.4)$$

ويقال في هذه الحالة أن الدالة f قابلة للتكامل المحدد بمفهوم ريمان على الفترة $[a, b]$ بمعنى آخر العدد I يسمى تكامل ريمان للدالة f على الفترة $[a, b]$ إذا كان

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall D_n)(\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k])(|D_n| < \delta \Rightarrow |I - \sigma(D_n, f)| < \varepsilon)$$

ملاحظات (11.1.1) :

(1) إذا كانت الدالة f غير سالبة ومحدودة في الفترة $[a, b]$ وكان التكامل $\int_a^b f(x) dx$ موجود

فإن $\int_a^b f(x) dx$ يعبر عن المساحة الواقعة بين منحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمان $x=a$, $x=b$.

(2) إذا كان كلا من f , g دالة محدودة وكانت $g-f$ دالة غير سالبة في الفترة $[a, b]$ وكان

كلاً من التكاملين $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b g(x) dx$ موجود فإن $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$ يعبر عن المساحة المحصورة بين منحنى الدالتين f , g والمستقيمان $x=a$, $x=b$.

مثال (12.1.1) :

(i) إذا كانت $f(x) = c$; $\forall x \in [a, b]$ حيث c مقدار ثابت. هل الدالة f قابلة للتكامل المحدد بمفهوم ريمان على الفترة $[a, b]$ ؟

الحل :

نأخذ تقسيم $D_n = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ للفترة $[a, b]$. إذا لأي اختيار للنقط ξ_k في الفترة $[x_{k-1}, x_k]$ يلاحظ أن $f(\xi_k) = c$; $\forall k = 1, 2, \dots, n$ ، ويكون مجموع ريمان لهذه الدالة هو

$$\sigma(f; D_n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n c \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b-a)$$

إذاً

$$\lim_{|D_n| \rightarrow 0} \sigma(f; D_n) = \lim_{|D_n| \rightarrow 0} c(b-a) = c(b-a)$$

وهذه النهاية لا تعتمد على التقسيم ولا على اختيار النقط ξ_k في الفترة $[x_{k-1}, x_k]$ ، إذا الدالة f قابلة للتكامل بمفهوم ريمان ويكون $\int_a^b c \, dx = c(b-a)$.

$$(ii) \text{ احسب } \int_1^3 6 \, dx$$

الحل : باستخدام نتيجة المثال السابق نجد أن $\int_1^3 6 \, dx = 6(3-1) = 12$

(iii) احسب تجميعات ريمان للدالة $f(x) = x$ على الفترة $[0,1]$ بتقسيم منتظم عدد فترات n وباختيار ξ_k نهاية فترات التقسيم.

الحل :

نأخذ التقسيم $D_n = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_n = 1\}$ والذي يقسم الفترة $[0,1]$ إلى n من الفترات المتساوية (ويسمى تقسيم منتظم) طول كل منها يساوي $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$. إذا مجموعة نقط التقسيم تأخذ الصورة :

$$D_n = \{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1\}$$

نختار النقط ξ_k في الفترات $[x_{k-1}, x_k]$ كما يلي :

$$\xi_k = x_k ; \forall k = 1, 2, \dots, n$$

$$f(\xi_k) = \xi_k = x_k = \frac{k}{n} ; \forall k = 1, 2, \dots, n \quad \text{إذاً}$$

ويكون مجموع ريمان لهذه الدالة هو :

$$\sigma(f; D_n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n x_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{1}{n}$$

وعليه فإن

$$\sigma(f; D_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

لاحظ من تعريف تكامل ريمان أن كون الدالة محدودة شرط ضروري وغير كافي لكي تكون الدالة قابلة للتكامل المحدد و المثال التالي يوضح أن هذا الشرط غير كافي.

مثال (1.1.13) :

إذا كانت f دالة معرفة على الفترة $[0,1]$ على النحو التالي :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [0,1] \text{ rational (عدد قياسي)} \\ 0 & ; x \in [0,1] \text{ irrational (عدد غير قياسي)} \end{cases}$$

هل الدالة f قابلة للتكامل المحدد على الفترة $[0,1]$ ؟

الحل : نفترض التقسيم

$$D_n = \{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1\}$$

ونختار ξ_k عدد قياسي ينتمي للفترة

$$\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] = [x_{k-1}, x_k] \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

و نكون مجموع ريمان المناظر لهذا الاختيار فيكون :

$$\sigma(f; D_n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = 1 \quad \dots \quad (1.5)$$

الآن بطريقة أخرى باختيار ξ_k عدد غير قياسي ينتمي للفترة

$$\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] = [x_{k-1}, x_k] \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

و نكون مجموع ريمان المناظر لهذا الاختيار فيكون :

$$\sigma(f; D_n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \Delta x_k = 0 \quad \dots \quad (1.6)$$

من (1.5) ، (1.6) يتضح أن $\sigma(f; D_n)$ تعتمد على اختيار النقط ξ_k وبالتالي

$\lim_{|D_n| \rightarrow 0} \sigma(f; D_n)$ تكون غير موجودة ، أي أن الدالة f المعطاة تكون غير قابلة للتكامل بمفهوم

ريمان على الفترة $[0,1]$.

تجميعات داربو السفلية و العلوية : (Upper and Lower Darboux Sums)

تعريف (1.1.14) : لتكن f دالة محدودة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وأن

$$M = \sup_{x \in [a,b]} f \quad ; \quad m = \inf_{x \in [a,b]} f$$

و كانت D_n تجزئة اختيارية للفترة $[a,b]$. بفرض أن

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f \quad ; \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f$$

نكون التجميعات الآتية :

$$\sigma^+(f; D_n) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1.7)$$

$$\sigma^-(f; D_n) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1.8)$$

هذه التجميعات تسمى تجميعات داربو العلوية والسفلية علي الترتيب للدالة f المناظرة للتقسيم D_n .
من الواضح أن

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M ; \quad \forall k=1,2,\dots,n$$

وينتج من ذلك أن

$$m(b-a) \leq \sigma^-(f; D_n) \leq \sigma^+(f; D_n) \leq M(b-a) \quad \dots \quad (1.9)$$

أى أن مجموعة كل تجميعات داربو العلوية و السفلية المناظرة لجميع التجزئات D_n لدالة محدودة f تكون محدودة ، وبالتالي يكون $\sup_{D_n} \sigma^-(f; D_n)$ ، $\inf_{D_n} \sigma^+(f; D_n)$ موجودة (أعداداً حقيقية) .

يُعرّف العدد $\sup_{D_n} \sigma^-(f; D_n)$ علي أنه تكامل داربو السفلي ونرمز له بالرمز $\underline{I}$ وأحياناً يُكتب $\int_a^b f(x)dx$ والعدد $\inf_{D_n} \sigma^+(f; D_n)$ علي أنه تكامل داربو العلوي ونرمز له بالرمز $\bar{I}$ وأحياناً يُكتب $\int_a^{\bar{b}} f(x)dx$. أى أن :

$$\bar{I} = \inf_{D_n} \sigma^+(f; D_n) = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1.10)$$

$$\underline{I} = \sup_{D_n} \sigma^-(f; D_n) = \int_a^b f(x)dx \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1.11)$$

نتيجة (1.1.15) : إذا كانت f دالة محدودة على الفترة المغلقة $[a,b]$ أى أنه يوجد عدنان حقيقيان M, m بحيث يكون :

$$m \leq f(x) \leq M ; \quad \forall x \in [a,b]$$

فإن

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x)dx \leq M(b-a) \quad \dots \quad \dots \quad (1.12)$$

مثال (1.1.16) : أوجد تجميعي داربو العلوي والسفلي للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 1]$ المناظرة للتقسيم :

$$D_4 = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right\}$$

الحل : حيث أن الدالة x^2 تزايدية على الفترة $[0, 1]$ فإنها تصل إلى قيمتها العظمى على الفترة $[x_{k-1}, x_k]$ في نهاية هذه الفترة وقيمتها الصغرى في بداية هذه الفترة أي أن :

$$m_1 = 0, \quad m_2 = (1/4)^2, \quad m_3 = (1/2)^2, \quad m_4 = (3/4)^2 ;$$

$$M_1 = (1/4)^2, \quad M_2 = (1/2)^2, \quad M_3 = (3/4)^2, \quad M_4 = 1$$

ويلاحظ أن

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{4} ; \forall k = 1, 2, 3, 4$$

ويكون تجميع داربو العلوي للدالة هو :

$$\sigma^+(x^2; D_4) = \sum_{k=1}^4 M_k \Delta x_k$$

$$= (1/4)^2 \times (1/4) + (1/2)^2 \times (1/4) + (3/4)^2 \times (1/4) + (1)^2 \times (1/4) = \frac{30}{64}$$

ويكون تجميع داربو السفلي للدالة هو :

$$\sigma^-(x^2; D_4) = \sum_{k=1}^4 m_k \Delta x_k$$

$$= (0)^2 \times (1/4) + (1/4)^2 \times (1/4) + (1/2)^2 \times (1/4) + (3/4)^2 \times (1/4) = \frac{7}{32}$$

نظرية (1.1.17) : إذا كانت f دالة محدودة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإنها تكون قابلة للتكامل بمفهوم ريمان إذا وفقط إذا تحقق أن $\bar{I} = \underline{I} = I$.

مثال (1.1.18) : أوجد $\sigma^-(f; D_n)$, $\sigma^+(f; D_n)$ للدالة $f(x) = 5x + 1$ على الفترة $[0, 3]$ إذا كان D_n تقسيم منتظم للفترة $[0, 3]$ عدد فترات n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^-(f; D_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^+(f; D_n)$.

الحل :

واضح من الفرض أن $D_n = \left\{ 0, \frac{3}{n}, 2 \times \frac{3}{n}, 3 \times \frac{3}{n}, \dots, n \times \frac{3}{n} \right\}$ ، وحيث أن الدالة $f(x) = 5x + 1$ محدودة وتزايدية في الفترة $[0, 3]$ (تحقق من ذلك؟) إذن أصغر قيمة للدالة في كل فترة من فترات التقسيم تكون عند نقطة البداية للفترة وأكبر قيمة للدالة في كل فترة من فترات التقسيم تكون عند نقطة النهاية للفترة ، أي أن

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k) = 5 \times \frac{3k}{n} + 1 ;$$

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f = f(x_{k-1}) = f\left(\frac{3(k-1)}{n}\right) = 5 \times \frac{3(k-1)}{n} + 1$$

إذن

$$\begin{aligned} \sigma^+(f; D_n) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{15k}{n} + 1 \right) \times \frac{3}{n} = \frac{45}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{45}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{n} \times n = \frac{45}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 3 \\ \sigma^-(f; D_n) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{15(k-1)}{n} + 1 \right) \times \frac{3}{n} = \frac{45}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1) + \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{45}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{3}{n} \times n = \frac{45}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 3 \end{aligned}$$

وبالتالي نجد أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^+(f; D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{45}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 3 = \frac{45}{2} + 3 = 25.5$$

وأيضاً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^-(f; D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{45}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 3 = \frac{45}{2} + 3 = 25.5$$

ملاحظات (1.1.19):

1- إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ فيمكن إثبات أن

$$\inf_{D_n} \sigma^+(f; D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^+(f; E_n) , \quad \sup_{D_n} \sigma^-(f; D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^-(f; E_n)$$

حيث E_n تقسيم منتظم للفترة $[a, b]$ عدد فتراته n .

2- إذا كانت f دالة محدودة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وكان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^-(f; E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^+(f; E_n)$$

تكون f قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$.

تعريف (1.1.20) :

يقال أن الدالة f متصلة قطعياً على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا كانت f متصلة على هذه الفترة فيما عدا ربما عند عدد منته من عناصر هذه الفترة ، والتي يكون عندها الانفصال من النوع الأول أو الثالث.

مثال (1.1.21) : إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 3 & ; \quad 1 < x < 2 \\ 2x+1 & ; \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

فإن هذه الدالة متصلة قطعياً على الفترة $[0, 3]$ (تحقق من ذلك).

نظرية (1.1.22) : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإنها تكون قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على هذه الفترة .

نظرية (1.1.23) : إذا كانت الدالة f متصلة قطعياً على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإن f تكون قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على هذه الفترة .

نظرية (1.1.24) : إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum_{k=1}^n f \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right)$$

البرهان : حيث أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فهي قابلة للتكامل المحدد بمفهوم ريمان على هذه الفترة ، أي أن $\lim_{|D_n| \rightarrow 0} \sigma(f; D_n)$ موجودة ولا تعتمد على التقسيم ولا على

إختيار ξ_k من الفترة $[x_{k-1}, x_k]$.

نُحدث تقسيم منتظم D_n للفترة $[a, b]$:

$$D_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, b = a + n \frac{b-a}{n} \right\}$$

إلى فترات منتظمة وطول كل منها $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ ونختار النقط

$$\xi_k = a + k \left(\frac{b-a}{n} \right) \in [x_{k-1}, x_k] \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

ويكون

$$\sigma(f; D_n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

وبلاحظ أن $|D_n| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$ وعليه فإن

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f; D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

مثال (1.1.25) :

(i) بين أن الدالة $f(x) = x$ قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على الفترة $[a, b]$. ثم احسب قيمة تكاملها على هذه الفترة باستخدام تجميعات ريمان.

الحل : حيث أن الدالة $f(x) = x$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، إذاً هي قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على هذه الفترة . من نظرية (1.1.24) وبعد أخذ تقسيم منتظم D_n للفترة $[a, b]$ يكون :

$$\begin{aligned} \int_a^b x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)}{n} \left(na + \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)}{n} \left(na + \frac{(b-a)}{n} \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a + \frac{(b-a)}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \end{aligned}$$

$$\text{أي أن } \int_a^b x dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

(ii) بين أن الدالة $f(x) = x^2$ قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على الفترة $[0, 1]$ ، ثم احسب قيمة تكاملها على هذه الفترة باستخدام تجميعات ريمان.

الحل : حيث أن الدالة $f(x) = x^2$ متصلة على الفترة المغلقة $[0,1]$ ، إذاً هي قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على هذه الفترة . ومن نظرية (1.1.24) وبعد أخذ تقسيم منتظم D_n للفترة $[0,1]$ حيث $a=0$, $b=1$ يكون :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2\end{aligned}$$

وبما أن

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

إذاً

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{3}$$

(iii) يبين أن الدالة $f(x) = x^2$ قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على الفترة $[a,b]$ ، ثم احسب قيمة تكاملها على هذه الفترة .

الحل : (تمرين) (تأكد من أن $\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$)

عامة يمكن ملاحظة أن الدالة $f(x) = x^n$ حيث $n \in \mathbb{N}$ عدد صحيح موجب قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على الفترة $[a,b]$ ويمكن التأكد من أن :

$$\begin{aligned}\int_a^b x^n dx &= \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}) \\ (iv) \text{ باستخدام تجميعات ريمان احسب } \int_{-1}^2 (x+1) dx\end{aligned}$$

الحل : بوضع $f(x) = x+1$ وباستخدام نظرية (1.1.24) وبعد أخذ تقسيم منتظم D_n للفترة $[-1,2]$ حيث $a=-1$; $b=2$ يكون :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x+1) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n f\left(-1 + \frac{3k}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(-1 + \frac{3k}{n} + 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3k}{n}\right)\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

إذا

$$\int_{-1}^2 (x+1)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{9}{2}$$

=====

=====