

المحاضرة الأولى

التكامل المحدد Definite integral

بند (1) : تجميعات ريمان والتكامل المحدد :

(Riemann's Sums and Definite Integral)

تمهيد: إصطلاح التجميع (سيما) $\sum$: (Summation Notation)

يعتبر رمز التجميع $\sum$ ملائماً للتعبير عن التجميع التي تتضمن عدداً كبيراً من الحدود فمثلاً المجموع

$x_1 + x_2 + \dots + x_n$ يمكن كتابته في صورة المختصرة $\sum_{k=1}^n x_k$ ويقرأ مجموع x_k حيث k تأخذ

القيم من 1 إلى n ، أي أن

$$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

k تسمى دليل التجميع (summation index) ويمكن إحلال k بأي حرف آخر وليكن i أو

j أو r . فعلى سبيل المثال نكتب

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n x_j = \sum_{r=1}^n x_r = \dots$$

ونجد على سبيل المثال أن :

$$\sum_{k=3}^6 f(x_k) = f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6)$$

مثال (1.1.1) :

$$(1) \sum_{k=1}^5 k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

$$(2) \sum_{k=0}^3 x^k = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$(3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

نظرية (1.1.2) :

إذا كان m, n عددين صحيحين ، c مقدار ثابت بحيث أن $n \geq m$ فإن :

$$(1) \sum_{k=1}^n c = \underbrace{c + c + \dots + c}_{n \text{ - times}} = nc$$

$$(2) \sum_{k=m}^n c = (n - m + 1)c$$

$$(3) \sum_{k=m}^n (x_k \pm y_k) = \sum_{k=m}^n x_k \pm \sum_{k=m}^n y_k$$

$$(4) \sum_{k=m}^n cx_k = c \sum_{k=m}^n x_k$$

$$(5) \sum_{k=m}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_{m-1}$$

البرهان : يأتي مباشرةً من تطبيق مفهوم التجميع .

نظرية (1.1.3) :

$$(i) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(ii) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(iii) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

البرهان : (i) من المعلوم أن

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \quad \dots \quad (1.1)$$

وبإعادة ترتيب حدود الطرف الأيمن من الأخير إلى الأول نحصل على

$$\sum_{k=1}^n k = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 \quad \dots \quad (1.2)$$

بجمع (1.1) , (1.2) ينتج أن :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n k &= (n+1) + (2+(n-1)) + \dots + ((n-1)+2) + (n+1) \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n\text{-times}} = n(n+1) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ويكون إذاً}$$

(ii) من المعلوم أنه لأي عددين حقيقيين a, b يكون :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

إذاً باستخدام النتيجة التالية (حيث k عدد طبيعي):

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

$$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 ;$$

يكون

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 ;$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$$

... ..

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

بجمع العلاقات السابقة نحصل على :

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 \dots) + n$$

$$n^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \quad \text{إذاً}$$

أي أن

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k=1}^n k^2 &= n^3 + 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n(n^2 - 1) + 3 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1)(n-1) + 3 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1) \left(\frac{2n-1}{2} + \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

إذاً

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) لإثبات هذه العلاقة نستخدم المتطابقة التالية :

$$k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$$

وترك تمرين للطالب.

ملاحظة: يمكن استخدام ما يسمى بمبدأ الاستنتاج الرياضي (Mathematical Induction) لإثبات صحة العلاقات في النظرية السابقة.

مثال (4.1.1) : أوجد قيم المجاميع الآتية :

$$(i) \sum_{k=1}^n (2k+3)$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{100} (3k^2 + 2k + 1)$$

$$(iii) \sum_{r=1}^4 (2r^3 + 8r + 3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} (i) \sum_{k=1}^n (2k+3) &= 2 \sum_{k=1}^n k + 3 \sum_{k=1}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + 3n \\ &= n^2 + n + 3n = n^2 + 4n = n(n+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \sum_{k=1}^{100} (3k^2 + 2k + 1) &= 3 \sum_{k=1}^{100} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{100} k + \sum_{k=1}^{100} 1 \\ &= 3 \left(\frac{100(101)(201)}{6} \right) + 2 \left(\frac{100(101)}{2} \right) + 100 = 1025250 \end{aligned}$$

(iii) تمرين.

المساحات التقريبية : (Approximate Areas)

من دراستنا السابقة في الهندسة الإقليدية نعلم أن مساحة المستطيل تعرف على أنها حاصل ضرب طول ضلعه وهما ما يسمى بطول وعرض المستطيل . فإذا كان a , b هما طولى ضلعى المستطيل فإن مساحته تعطى من العلاقة $S = ab$.

في المثال التالى سوف نوضح كيفية الحصول على قيمة تقريبية للمساحة المحصورة بين منحنى الدالة الموجبة المتصلة $y = f(x)$ على الفترة المغلقة $[a, b]$ والمحور السينى والمستقيمان $x = a$, $x = b$ ، وذلك باستخدام مفهوم تعريف مساحة المستطيل.

مثال (5.1.1) :

أوجد قيمة تقريبية للمساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = -x^2 + 5$ والمحور السينى والمستقيمان $x = 0$; $x = 2$.

الحل :

نقسم الفترة $[0, 2]$ إلى خمسة أقسام متساوية طول كل منها يساوى $\frac{2}{5}$ وتكون عدد نقاط التقسيم ستة وهى على الترتيب :

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{4}{5}, x_3 = \frac{6}{5}, x_4 = \frac{8}{5} \text{ \& } x_5 = \frac{10}{5} = 2$$

أى أن

$$x_k = \frac{2k}{5} ; \quad \forall k = 0, 1, \dots, 5$$

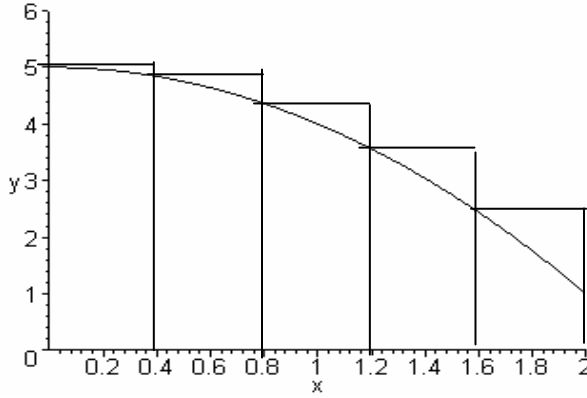
وعليه تكون فترات التقسيم الخمس هى على النحو التالى :

$$\left[0, \frac{2}{5}\right] , \quad \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right] , \quad \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right] , \quad \left[\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right] \text{ \& } \left[\frac{8}{5}, \frac{10}{5}\right]$$

عند نقاط التقسيم نقيم أعمدة على المحور السينى وتوازي المحور الصادى فتلاقى منحنى الدالة عند النقاط $(x_k, f(x_k))$ حيث

$$f(x_k) = - (x_k)^2 + 5 ; \quad \forall k = 0, 1, \dots, 5$$

والآن نستكمل المستطيلات التي تقع أعلي منحنى الدالة المعطاه ونحسب مجموع مساحاتها والشكل التالي يوضح تلك المستطيلات:



ونلاحظ أن عرض كلا من هذه المستطيلات الخمس وهو طول فترة التقسيم هو :

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{2}{5} ; \forall k = 1, 2, \dots, 5$$

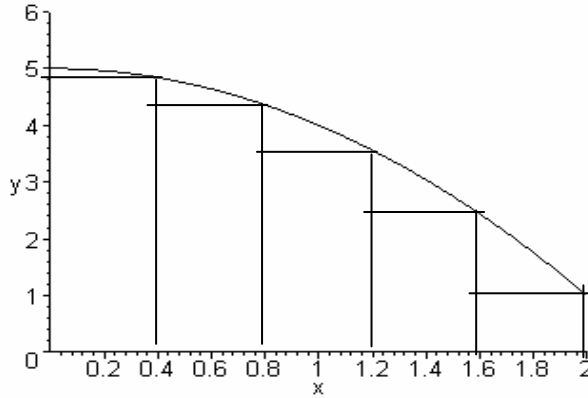
وحيث أن الدالة تناقصية في الفترة $[0, 2]$ فتكون قيمة الدالة في بداية الفترة $[x_{k-1}, x_k]$ هي أكبر قيمة للدالة وقيمة الدالة في نهاية الفترة هي أصغر قيمة للدالة في هذه الفترة وحيث أن نقط بداية فترات التقسيم هي $\frac{2(k-1)}{5} ; \forall k = 1, 2, \dots, 5$ وارتفاعات هذه المستطيلات الخمس هي :

$$f\left(\frac{2(k-1)}{5}\right) ; \forall k = 1, 2, \dots, 5$$

ف نجد أن مجموع مساحات هذه المستطيلات S_1 يعطى من العلاقة :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^5 f\left(\frac{2(k-1)}{5}\right) \Delta x_k = \sum_{k=1}^5 f\left(\frac{2(k-1)}{5}\right) \left(\frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{2}{5} \sum_{k=1}^5 \left(-\left(\frac{2(k-1)}{5}\right)^2 + 5 \right) \\ &= -\left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\sum_{k=1}^5 k^2 - 2 \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 1 \right) + \frac{2}{5} \sum_{k=1}^5 5 \\ &= -\left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{5(6)(11)}{6} - 2 \frac{5(6)}{2} + 5 \right) + \frac{2}{5} (25) = 8.08 \end{aligned}$$

نقوم ثانيا باستكمال المستطيلات التي تقع أسفل منحنى الدالة المعطاه ونوجد مجموع مساحتها والشكل التالي يوضح تلك المستطيلات :



وبلاحظ أن عرض كلا من هذه المستطيلات الخمس هو :

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{2}{5} ; \forall k = 1, 2, \dots, 5$$

وتكون نقط نهايات فترات التقسيم هي :

$$\frac{2k}{5} ; \forall k = 1, 2, \dots, 5$$

وارتفاعات هذه المستطيلات الخمس هي :

$$f\left(\frac{2k}{5}\right) ; \forall k = 1, 2, \dots, 5$$

وبالتالي فإن مجموع مساحات هذه المستطيلات S_2 هي :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^5 f\left(\frac{2k}{5}\right) \Delta x_k = \sum_{k=1}^5 f\left(\frac{2k}{5}\right) \left(\frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{2}{5} \sum_{k=1}^5 \left(-\left(\frac{2k}{5}\right)^2 + 5 \right) = -\left(\frac{2}{5}\right)^3 \sum_{k=1}^5 k^2 + \frac{2}{5} \sum_{i=1}^5 5 \\ &= -\left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{5(6)(11)}{6} \right) + \frac{2}{5}(25) = 6.48 \end{aligned}$$

ومما سبق يتضح أن المساحة المطلوبة والمحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = -x^2 + 5$ والمحور السيني

والمستقيمان $x=0$; $x=2$ تكون محصورة بين القيمتين $S_1 = 8.08$ ، $S_2 = 6.48$. أي أن

$$6.48 < \text{المساحة المطلوبة} < 8.08$$

ويمكن أخذ المتوسط لتكون القيمة التقريبية للمساحة المطلوبة هي

$$S \approx \frac{1}{2}(S_1 + S_2) = \frac{1}{2}(8.08 + 6.48) = 7.28$$

فإذا علمنا أن المساحة الحقيقية المطلوبة هي $S = \frac{22}{3}$ فنجد أن قيمة الخطأ تقريباً تكون $7.33 - 7.28 = 0.05$.

تمرين: في المثال السابق تم تقسيم الفترة المعطاة إلى خمس فترات متساوية. نترك للطالب إعادة حل المثال السابق وذلك بتقسيم الفترة المعطاة إلى عشر فترات متساوية مع مقارنة النتائج في المثالين.

الآن وعلي وجه العموم بفرض أن الدالة $y = f(x)$ معرفة ومتصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ومطلوب إيجاد المساحة المستوية المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمان $x=a$, $x=b$.

من أجل ذلك نقسم الفترة $[a, b]$ بالتجزئة $z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ، حيث $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ إلى فترات صغيرة عددها n علي الصورة $I_k = [x_{k-1}, x_k]$; $k=1, 2, \dots, n$ ويكون طول الفترة I_k هو $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; $k=1, 2, \dots, n$.

لإيجاد قيمة تقريبية للمساحة المطلوبة نختار n من النقط الاختيارية $\xi_k \in I_k$, $\forall k=1, 2, \dots, n$ تكون مساحة المستطيل الذي بعده Δx_k ، $|f(\xi_k)|$ هي $|f(\xi_k)| \Delta x_k$. بأخذ مجموع كل مساحات المستطيلات نحصل على قيمة تقريبية للمساحة المحصورة بين المنحنى $y=f(x)$ والمحور السيني $y=0$ والمستقيمان $x=a$, $x=b$ وهذه القيمة التقريبية للمساحة تعطى من العلاقة $\sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k$.
ملاحظة (7.1.1) :

من الملاحظ أن عدد فترات التقسيم اختياري وكذلك النقط ξ_k مما يؤثر على قيمة المجموع $\sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k$ ويلاحظ أيضاً أنه كلما زاد عدد فترات التقسيم واقترب طول أكبر فتراته من الصفر كلما اقترب هذا المجموع من المساحة الفعلية .

تجميعات ريمان : (Riemann's Sums)

تعريف (8.1.1) : تُسمى المجموعة $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ من نقط الفترة $[a, b]$ حيث $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ تقسيم للفترة $[a, b]$ ويُعرّف مقياس هذا التقسيم على أنه:

$$|D_n| = \max_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \max_{k=1}^n \Delta x_k$$

ويكون مقياس التقسيم (أو معيار التقسيم) هو طول أطول فترة من فترات التقسيم .

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة ومحدودة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وكان $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تقسيم للفترة $[a, b]$ وبأخذ النقط $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ حيث $k = 1, 2, 3, \dots, n$ نكون المجموع

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

ويسمى هذا المجموع بمجموع ريمان للدالة f على الفترة $[a, b]$ المصاحب للتقسيم D_n ويرمز له بـ $\sigma(f; D_n)$ أي أن :

$$\sigma(f; D_n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad \dots \quad (1.3)$$

مثال (9.1.1)

إذا كانت $f(x) = 4 - x^2$ فأوجد مجموع ريمان للدالة f على الفترة $[-1, 2]$ المصاحب للتقسيم $D_4 = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2\right\}$ بفرض أن النقط الاختيارية هي :

$$\xi_1 = -\frac{1}{4}, \xi_2 = \frac{1}{4}, \xi_3 = 1, \xi_4 = \frac{5}{4}$$

الحل : مجموع ريمان يعطى من العلاقة التالية:

$$\sigma(f; D_4) = \sum_{k=1}^4 f(\xi_k) \Delta x_k$$

وحيث أن

$$\Delta x_1 = 0 - (-1) = 1 ; \Delta x_2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} ; \Delta x_3 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad \& \quad \Delta x_4 = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

أيضاً

$$f(\xi_1) = 4 - \xi_1^2 = 4 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{63}{16} ; f(\xi_2) = 4 - \xi_2^2 = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{63}{16} ;$$

$$f(\xi_3) = 4 - \xi_3^2 = 4 - (1)^2 = 3 ; f(\xi_4) = 4 - \xi_4^2 = 4 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{39}{16}$$

إذن يكون

$$\sigma(f; D_4) = \sum_{k=1}^4 f(\xi_k) \Delta x_k = \left(\frac{63}{16}\right)(1) + \left(\frac{63}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + (3)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{39}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 9.98$$