

تمارين (8)

احسب التكاملات الآتية :

- | | |
|--|--|
| <p>(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x-2x^2}}$</p> <p>(2) $\int e^x \sqrt{1-e^{2x}} dx$</p> <p>(3) $\int \frac{dx}{1+2x^2+x^4}$</p> <p>(4) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2-\sin^2 x}}$</p> <p>(5) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$</p> <p>(6) $\int \frac{x dx}{x^2-4x+8}$</p> <p>(7) $\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$</p> | <p>(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$</p> <p>(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$</p> <p>(10) $\int \frac{dx}{8x^2+8x+3}$</p> <p>(11) $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13} dx$</p> <p>(12) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+4}}$</p> <p>(13) $\int \frac{2x+3}{4x^2+4x+5} dx$</p> <p>(14) $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-2x+x^2}}$</p> |
|--|--|

أمثلة (2. 6. 11) : على التكاملات المثلثية : Trigonometric Integrals

(1) احسب $\int \sin^4 x dx$

الحل:

$$\begin{aligned}
 \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx \\
 &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\
 &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \\
 &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c
 \end{aligned}$$

(2) احسب

$$\int \cos^4 x dx$$

الحل : تمرين .

بنفس الطريقة السابقة يمكن حساب

$$\int \cos^n x dx, \int \sin^n x dx$$

عندما تكون n عددا صحيحا زوجيا موجبا ، حيث يمكن كتابة

$$\sin^{2m} x = (\sin^2 x)^m = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^m$$

(3) احسب

$$\int \sin^3 x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)(-d \cos x) = -\left[\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} \right] + c \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c \end{aligned}$$

(4) احسب

$$\int \cos^3 x dx$$

الحل : تمرين .

بنفس الطريقة السابقة يمكن حساب $\int \cos^n x dx, \int \sin^n x dx$ حيث n عددا فرديا صحيحا موجبا ، لأنه يمكن كتابة

$$\sin^{2m+1} x = (\sin^2 x)^m \sin x = (1 - \cos^2 x)^m \sin x$$

وهكذا في حالة $\cos^{2m+1} x$.

(5) احسب

$$\int \sec^4 x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x dx &= \int \sec^2 x \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x) d \tan x \\ &= \int \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

(6) احسب

$$\int \csc^4 x \, dx$$

الحل : تمرين .

بالمثل يمكن حساب $\int \sec^{2m} x \, dx$, $\int \csc^{2m} x \, dx$ عندما تكون m عددا صحيحا موجبا.

(7) احسب

$$\int \sec^5 x \, dx$$

الحل :

$$\int \sec^5 x \, dx = \int \sec^3 x \sec^2 x \, dx$$

وبأخذ

$$u = \sec^3 x \quad \& \quad dv = \sec^2 x \, dx$$

يكون

$$du = 3\sec^2 x \sec x \tan x \, dx \quad \& \quad v = \tan x$$

$$\therefore \int \sec^5 x \, dx = \sec^3 x \tan x - \int 3\sec^3 x \tan^2 x \, dx$$

$$= \sec^3 x \tan x - 3 \int \sec^3 x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \sec^3 x \tan x - 3 \int \sec^5 x \, dx + 3 \int \sec^3 x \, dx$$

وبالتالى

$$4 \int \sec^5 x \, dx = \sec^3 x \tan x + 3 \left[\frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x \tan x| \right] + c$$

$$\therefore \int \sec^5 x \, dx = \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{8} \sec x \tan x + \frac{3}{8} \ln |\sec x \tan x| + L$$

حيث L ثابت اختياري .

$$\int \csc^{2m+1} x \, dx \quad \& \quad \int \sec^{2m+1} x \, dx$$

عندما تكون m عدد طبيعي .

(8) احسب

$$\int \tan^4 x \, dx$$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x \, dx &= \int (\tan^2 x)^2 \, dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \, dx = \int (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1) \, dx \\
&= \int \sec^2 x \sec^2 x - 2 \int \sec^2 x \, dx + \int dx \\
&= \int (\tan^2 x + 1)(d \tan x) - 2 \int \sec^2 x \, dx + \int dx \\
&= \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - 2 \tan x + x + c
\end{aligned}$$

(9) احسب

$$\int \cot^4 x \, dx$$

الحل : تمرين .

بنفس الطريقة يمكن حساب $\int \cot^{2m} x \, dx, \int \tan^{2m} x \, dx$ عندما تكون m عددا طيعيا .

(10) احسب

$$\int \tan^3 x \, dx$$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \, dx &= \int \tan^2 x \tan x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan x \, dx \\
\therefore \int \tan^3 x \, dx &= \int \sec^2 x \tan x \, dx - \int \tan x \, dx = \int \sec x (\sec x \tan x \, dx) - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\
&= \int \sec x (d \sec x) + \int \frac{1}{\cos x} (d \cos x) = \frac{1}{2} \sec^2 x + \ln |\cos x| + c
\end{aligned}$$

(11) احسب

$$\int \cot^3 x \, dx$$

الحل : تمرين .

بالمثل يمكن حساب $\int \cot^{2m+1} x \, dx, \int \tan^{2m+1} x \, dx$ عندما تكون m عددا طيعيا .

(12) احسب

$$\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \cos^5 x dx &= \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\
&= \int (\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x) \cos x dx \\
&= \int (\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x) d(\sin x) \\
&= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c
\end{aligned}$$

(13) احسب

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx$$

الحل : تمرين .

كذلك يمكن حساب $\int \sin^n x \cos^m x dx$ عندما يكون m أو n عددا فرديا موجبا .

(14) احسب

$$\int \sin^4 x \cos^4 x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 (\cos^2 x)^2 dx \\
&= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\
\therefore \int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos^2 2x)^2 dx \\
&= \frac{1}{16} \int (\sin^2 2x)^2 dx = \frac{1}{16} \int \sin^4 2x dx \\
&= \frac{3}{128} x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{1}{1024} \sin 8x + c
\end{aligned}$$

بنفس الطريقة يمكن حساب $\int \sin^n x \cos^m x dx$ عندما يكون كلا من m, n عددا زوجيا موجبا .

(15) احسب

$$\int \tan^3 x \sec^3 x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^3 x dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \sec x \tan x dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x d(\sec x) \\
&= \int (\sec^4 x - \sec^2 x) d(\sec x) = \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + c
\end{aligned}$$

بنفس الطريقة يمكن حساب $\int \sec^m x \tan^n x dx$ عندما يكون كل من m, n عددا فرديا موجبا.

(16) احسب

$$\int \tan^2 x \sec^4 x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \sec^4 x dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) d \tan x \\ &= \int (\tan^2 x + \tan^4 x) d \tan x = \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن حساب $\int \tan^m x \sec^n x dx$ عندما يكون n عددا زوجيا موجبا .

(17) احسب

$$\int \tan^2 x \sec^3 x dx$$

الحل :

$$\int \tan^2 x \sec^3 x dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x dx = \int \sec^5 x dx - \int \sec^3 x dx$$

ويمكن حساب هذه التكاملات الأخيرة كما سبق في حساب تكامل $\int \sec^{2m+1} x dx$ حيث m عددا طبيعيا .

بالمثل يمكن حساب التكاملات على الصورة $\int \tan^n x \sec^m x dx$ عندما يكون n عددا زوجيا موجبا و m عددا فرديا موجبا ، بتحويلها إلى تكاملات على الصورة $\int \sec^k x dx$

تمارين

احسب التكاملات الآتية:

(1) $\int \tan 3x dx$

(2) $\int \sec^2(5x + 2) dx$

(3) $\int \tan^2 x \sec^2 x dx$

(4) $\int \tan^5 x \sec^4 x dx$

(5) $\int \tan^3 4x \sec^4 x dx$

(6) $\int \tan^5 x \sec x dx$

(7) $\int \sec^2 x \tan^3 x dx$

(8) $\int \tan^2 \frac{x}{2} \sec^3 \frac{x}{2} dx$

(9) $\int \tan 2x \sec^3 2x dx$

(10) $\int \tan x \sec^5 x dx$

(11) $\int \sec^6(\pi x) dx$

(12) $\int x \tan^2 x^2 \sec^2 x^2 dx$

(13) $\int \sin x \cos ax dx, a \neq 0$

(14) $\int \sin^2(2x) \cos^3(2x) dx$

(15) $\int \sin x \cos 2x dx$

(16) $\int \sin(2x) \cos(4x) dx$

بند (7) : التكامل بالاختزال المتتالي :

نستخدم طريقة التكامل بالاختزال المتتالي عادة لحساب تكاملات بعض الدوال التي تعتمد على مقدار ثابت n أو عدة مقادير ثابتة $m, n, \dots$ وباستخدام هذه الطريقة يمكن التعبير عن التكامل المعطى بدلالة تكاملات يمكن حسابها بالطرق الأساسية السابق دراستها ، وبصفة عامة فإن معظم علاقات الاختزال يستخدم لاستنتاجها قاعدة التكامل بالتجزئ .

أمثلة (1.7.2) :

$$(1) \text{ أو وجد قانوناً اختزالياً لحساب التكامل } I_n = \int \sin^n x dx$$

الحل:

$$I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx = \int \sin^{n-1} x d \cos x$$

وبأخذ

$$u = \sin^{n-1} x \quad \& \quad dv = d \cos x$$

يكون

$$du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \quad \& \quad v = \cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore I_n &= -\int \sin^{n-1} x d(\cos x) \\ &= -\{\cos x \sin^{n-1} x - \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx\} \\ &= -\{\cos x \sin^{n-1} x - (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx\} \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

إذن

$$n I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

ويكون

$$I_n = \frac{-1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

فمثلاً إذا كانت $n = 2$ فإن

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} I_0 = -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} \int dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x + c \end{aligned}$$

وبأخذ $n = 3$ يكون

$$I_3 = -\frac{1}{3}\cos x \sin^2 x + \frac{2}{3}I_1 = -\frac{1}{3}\cos x \sin^2 x + \frac{2}{3}\int \sin x dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cos x \sin^2 x - \frac{2}{3}\cos x + c$$

إذن إذا كان $I_n = \int \sin^n x dx$ فإن

$$= -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad I_n = \int \sin^n x dx$$

حيث n عدد طبيعي .

(2) أوجد قانوناً اختزالياً للتكامل

$$I_n = \int \cos^n x dx$$

الحل : تمرين وعلى الطالب التأكد من أن :

$$I_n = \int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}, \quad n \in N, \quad n \geq 2$$

(3) أوجد قانوناً اختزالياً للتكامل

$$I_n = \int \tan^n x dx$$

الحل :

$$I_n = \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x d(\tan x) - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$$

أي أن

$$I_n = \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}, \quad n \in N, \quad n \geq 2$$

(4) أوجد قانوناً اختزالياً للتكامل

$$I_n = \int \cot^n x dx$$

الحل : يمكن للطالب التأكد من أن

$$I_n = \int \cot^n x dx = \frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - I_{n-2}, \quad n \in N, \quad n \geq 2$$

(5) أوجد قانوناً اختزالياً للتكامل

$$I_n = \int \sec^n x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sec^n x dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx = \int \sec^{n-2} x d(\tan x) \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-3} x \sec x \tan x \tan x dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx \\ \therefore (n-1)I_n &= \sec^{n-2} x \tan x + (n-2)I_{n-2} \end{aligned}$$

أي أن

$$I_n = \int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

(6) أوجد قانوناً اختزالياً لحساب التكامل

$$I_n = \int \csc^n x dx$$

الحل : تحقق من أن

$$I_n = \int \csc^n x dx = -\frac{1}{n-1} \csc^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

(7) أوجد قانوناً اختزالياً لحساب التكامل $I_n = \int (\arcsin x)^n dx$

الحل:

بأخذ التعويض $t = \arcsin x$ ، فيكون $x = \sin t$ وبالتالي $dx = \cos t dt$ وينتج أن

$$I_n = \int (\arcsin x)^n dx = \int t^n \cos t dt$$

بأخذ التجزئ

$$u = t^n, \quad dv = \cos t dt$$

$$\therefore I_n = t^n \sin t - n \int t^{n-1} \sin t dt$$

وبإجراء التجزئ ثانية على التكامل الأخير وبأخذ

$$u = t^{n-1}, \quad dv = \sin t dt$$

$$\therefore du = (n-1)t^{n-2} dt, \quad v = -\cos t$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_n &= t^n \sin t - n \{ -t^{n-1} \cos t - \int - (n-1) t^{n-2} \cos t dt \} \\
&= t^n \sin t + n t^{n-1} \cos t - n(n-1) \int t^{n-2} \cos t dt \\
&= t^n \sin t + n t^{n-1} \cos t - n(n-1) I_{n-2} \\
&= (\arcsin x)^n x + n(\arcsin x)^{n-1} \sqrt{1-x^2} - n(n-1) I_{n-2}
\end{aligned}$$

إذن

$$\boxed{I_n = \int (\arcsin x)^n dx} \\
\boxed{= (\arcsin x)^n x + n(\arcsin x)^{n-1} \sqrt{1-x^2} - n(n-1) I_{n-2} \quad , \quad n \in N}$$

وبنفس الطريقة يمكن استنتاج قانوناً اختزالياً لحساب

$$I_n = \int (\arccos x)^n dx$$

(8) أوجد قانوناً اختزالياً لحساب

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx \quad , \quad a \text{ constant} \quad , \quad a \neq 0$$

الحل: بإجراء التكامل بالتجزئ نحصل على

$$\begin{aligned}
I_n = \int x^n e^{ax} dx &= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \int n x^{n-1} \frac{e^{ax}}{a} dx \\
&= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}
\end{aligned}$$

أى أن

$$\boxed{I_n = \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1} \quad , \quad n \in N}$$

(9) أوجد قانوناً اختزالياً لحساب

$$I_n = \int \cos^n x e^{ax} dx \quad , \quad a \text{ constant} \quad , \quad a \neq 0$$

الحل:

يترك للطالب كتمرين وعليه التحقق من أن

$$\boxed{I_n = \frac{a e^{ax} \cos^{n-1} x}{a^2 + n^2} \{ \cos x + \frac{n}{a} \sin x \} + \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2} \quad , \quad n \in N}$$

(10) أوجد قانوناً اختزالياً لحساب

$$I_n = \int (\ln x)^n dx$$

الحل: باستخدام التجزئ

$$\begin{aligned}
u &= (\ln x)^n \quad , \quad dv = dx \\
\therefore du &= n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx \quad , \quad v = x
\end{aligned}$$

فيكون

$$I_n = \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx = x (\ln x) - n I_{n-1}$$

تمارين

أوجد قانوناً اختزالياً للتكاملات الآتية :

$$(1) \int x^n \sin ax dx, a \neq 0$$

$$(2) \int x^n \cos ax dx, a \neq 0$$

$$(3) \int e^{ax} (\sin x)^n dx, a \neq 0$$

$$(4) \int (\arccos x)^n dx$$

أمثلة متنوعة

(1) احسب

$$I = \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx$$

الحل :

بأخذ التعويض $t = \tan x$ فيكون

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

إذن

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} \frac{1}{1+t^2}} dt = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = \int (t^{-4} + 2t^{-2} + 1) dt \\ &= -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + c = -\frac{1}{3} \cot^3 x - 2 \cot x + \tan x + c \end{aligned}$$

(2) احسب

$$I = \int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$$

الحل : نأخذ التعويض $t = \tan \frac{x}{2}$ ثم أكمل الحل كتمرين .

(3) احسب

$$I = \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 9}} dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 9}} dx \cdot \frac{x - \sqrt{x^2 + 9}}{x - \sqrt{x^2 + 9}} dx = \int \frac{(x - \sqrt{x^2 + 9}) dx}{-9} \\ &= \frac{1}{9} \int (\sqrt{x^2 + 9} - x) dx = \frac{-1}{18} x^2 + \frac{1}{9} \int \sqrt{x^2 + 9} dx \end{aligned}$$

وبأخذ التعويض $x = 3 \tan t$ يكون

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 9} dx &= \frac{1}{9} \int 3 \sec t \cdot 3 \sec^2 t dt \\ &= \int \sec^3 t dt = \frac{1}{2} \sec t \tan t + \frac{1}{2} \ln |\sec t + \tan t| + c_1 \end{aligned}$$

ويكون

$$\begin{aligned} \therefore I &= -\frac{1}{18} x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 9} \right) \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 9} + \frac{x}{3} \right| + c \\ &= \frac{x}{18} \sqrt{x^2 + 9} + \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{x^2 + 9} + \frac{1}{3} x \right| - \frac{1}{18} x^2 + c \end{aligned}$$

(4) احسب

$$I = \int \frac{1}{a \cos x + b \sin x} dx$$

حيث $a, b \in \mathbb{R}$ & $a > 0$, $b > 0$

الحل :

حيث أن $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $-1 < \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$. إذن يمكن افتراض أن

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} , \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{a \cos x + b \sin x} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{1}{\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{1}{\cos(x - \alpha)} dx \end{aligned}$$

إذن

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \sec(x - \alpha) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln |\sec(x - \alpha) + \tan(x - \alpha)| + c$$

أى أن

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{1 + \sin(x - \alpha)}{\cos(x - \alpha)} \right| + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{1 + \sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha}{\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha} \right| + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a \sin x - b \cos x}{a \cos x + b \sin x} \right| + c \end{aligned}$$

(5) احسب التكامل

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+2)}} dx$$

الحل :

$$(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

إذن بأخذ التعويض

$$\left(x + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \sec t$$

يكون

$$dx = \frac{1}{2} \sec t \tan t dt$$

وحدود التكامل تصبح من $t = \sec^{-1} 3$ إلى $t = \sec^{-1} 7$

إذن

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+2)}} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \sec t \tan t}{\sqrt{\frac{1}{4} \sec^2 t - \frac{1}{4}}} dt = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + c$$

ويكون

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+2)}} dx &= \ln |\sec t + \tan t|_{\sec^{-1} 3}^{\sec^{-1} 7} \\ &= \ln |7 + 4\sqrt{3}| - \ln |3 + 2\sqrt{2}| = \ln \left| \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{2}} \right| \end{aligned}$$

(6) احسب

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \cos^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

الحل :

$$dt = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} dx \quad \text{بأخذ التعويض} \quad t = \cos^{-1} x^2 \quad \text{يكون}$$

إذن

$$\int \frac{x \cos^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = -\frac{1}{2} \int t dt = -\frac{1}{4} t^2 + c = -\frac{1}{4} (\cos^{-1} x^2)^2 + c$$

وبالتالى يكون

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \cos^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = -\frac{1}{4} \{(\cos^{-1} \frac{1}{2})^2 - (\cos^{-1} 0)^2\} = -\frac{1}{4} \{\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{4}\} = \frac{5\pi^2}{144}$$

ملاحظة :

يمكن إثبات العلاقة الآتية

$$\boxed{\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx}$$

بأخذ التعويض $x = a - t$ فيكون $dx = -dt$ وحدود التكامل تصبح من $t = a$ إلى $t = 0$ وينتج أن

$$\int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(a-t) (-dt) = \int_0^a f(a-t) dt = \int_0^a f(a-x) dx$$

(7) احسب التكامل

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

الحل :

من الملاحظة السابقة يكون

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin(\pi - x)}{1 + \cos^2(\pi - x)} dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \end{aligned}$$

وينتج من ذلك أن

$$2 \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\pi \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} dx = -\pi \tan^{-1}(\cos x) \Big|_0^{\pi}$$

إذن

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{1}{2} \pi \{ \tan^{-1}(-1) - \tan^{-1}(1) \} = -\frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right\} = \frac{\pi^2}{4}$$

(8) احسب التكامل

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$$

لأي عدد حقيقي n .

الحل :

من الملاحظة السابقة مع ملاحظة أن

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

يكون

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t} dt$$

أي أن

$$\begin{aligned} 2I &= I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x + \sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} dx = x \Big|_0^{\pi/2} = \pi/2 \end{aligned}$$

وبالتالي يكون $I = \pi/4$.

(9) باستخدام النظرية الأساسية للتحليل احسب النهاية الآتية :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \sqrt{2 + 5x^3} dx$$

الحل :

يفرض أن

$$F(t) = \int_0^t \sqrt{2 + 5x^3} dx \quad , \quad t > -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

إذن

$$F(1+h) = \int_0^{1+h} \sqrt{2+5x^3} dx \quad \& \quad F(1) = \int_0^1 \sqrt{2+5x^3} dx$$

$$\therefore F(1+h) - F(1) = \int_0^{1+h} \sqrt{2+5x^3} dx - \int_0^1 \sqrt{2+5x^3} dx$$

$$\therefore \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^{1+h} \sqrt{2+5x^3} dx$$

ولكن

$$F'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{1+h} \sqrt{2+5x^3} dx$$

ولكن من النظرية الأساسية للتفاضل

$$F'(x) = \sqrt{2+5x^3}$$

ويكون إذن

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{1+h} \sqrt{2+5x^3} dx = F'(1) = \sqrt{2+5} = \sqrt{7}$$

$$. I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (10) \text{ احسب}$$

الحل :

للتخلص من الجذر نأخذ التعويض $x = \sin \theta$ فيكون

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) + c = \frac{1}{2} (\sin^{-1} x + x\sqrt{1-x^2}) + c \end{aligned}$$

وينتج أن

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \{(\sin^{-1} 1 + 0) - (\sin^{-1} 0 + 0)\} = \frac{\pi}{4}$$

(11) احسب التكامل

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$$

الحل :

للتخلص من الجذر نأخذ التعويض $x = \sec \theta$ فيكون

$$dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$$

وعندما تتغير x من 1 إلى 2 فإن θ تتغير من 0 إلى $\frac{\pi}{3}$ ويكون إذن

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan \theta}{\sec^4 \theta} \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta d \sin \theta \\ &= \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

(12) احسب التكامل

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^5 \sin^6 x \cos^{11} x dx$$

الحل :

واضح أن الدالة تحت علامة التكامل دالة فردية على فترة التكامل المعطاه وبالتالي من خصائص التكامل المحدد ينتج أن قيمة التكامل تساوى صفرا.

تمارين عامة على الباب الثاني

1- احسب التكاملات الآتية

(1) $\int x \cos(2x) dx$

(2) $\int x \cos x^2 dx$

(3) $\int \tan^3 x \sec x dx$

(4) $\int \cot(3x) \operatorname{cosec}^2(3x) dx$

(5) $\int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \cos x}$

(6) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos x(1 + \cos x)}$

(7) $\int x^2 \cos^2 x dx$

(8) $\int \sec^3 \sin x dx$

(9) $\int \frac{dx}{\sec^5 x}$

(10) $\int \sin(5x) \sin(3x) dx$

$$(11) \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

$$(13) \int \frac{(5x^2+x+12)dx}{x^3+4x}$$

$$(15) \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1-5\tan x}}$$

$$(17) \int e^x \sec(e^x) dx$$

$$(19) \int (\log x)^2 dx$$

$$(21) \int \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x^2}$$

$$(23) \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$$

$$(25) \int \frac{(1+x)dx}{\sqrt{x}}$$

$$(12) \int \frac{(x+5)dx}{x^2+6x+13}$$

$$(14) \int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2+6x+5}}$$

$$(16) \int \sin(\cot^{-1} x) \cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

$$(18) \int \log(a^2+x^2) dx$$

$$(20) \int \log x \cdot \frac{dx}{x^2}$$

$$(22) \int \frac{x dx}{(x+1)^2}$$

$$(24) \int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}$$

$$(26) \int \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} dx$$

2- أوجد القيمة المتوسطة للدوال المعطاة باستخدام التكامل المحدد وحدد النقطة التي يكون عندها ذلك :

$$(أ) \quad y = x^3 \text{ على الفترة } [1,2]$$

$$(ب) \quad y = x^2 + 2x + 1 \text{ على الفترة } [0,1]$$

$$(ج) \quad y = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq 1 \\ x & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \text{ على الفترة } [0,2]$$

$$(د) \quad y = \cos x \text{ على الفترة } [-\pi/2, \pi/2]$$

3- باستخدام النظرية الأساسية للتحليل أو بأي طريقة أخرى احسب النهايات الآتية :

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} (3x + 5x^3)^4 dx$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \cos x^2 dx$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 1} \frac{1}{h-1} \int_1^h \sqrt{1-x^2} dx, \quad -1 \leq h \leq 1$$

4- احسب التكاملات الآتية :

$$(1) \int_0^{\pi/4} \cos 2x \sqrt{4 - \sin 2x} dx$$

$$(2) \int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x dx$$

$$(3) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$(4) \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$(5) \int_{-2}^0 \sqrt[3]{x+1} dx$$

$$(6) \int_0^{\pi/4} \sin 5x \sin 3x dx$$

$$(7) \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1+3 \tan x}}$$

$$(8) \int_1^2 \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x} dx$$

$$(9) \int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$$

$$(10) \int_1^3 \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} dx$$

$$(11) \int_1^2 \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) dx$$

$$(12) \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx$$

$$(13) \int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$$

$$(14) \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x dx$$

$$(15) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$$

$$(16) \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$(17) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$(18) \int x \tan^2 x dx$$

$$(19) \int \cos(\ln x) dx$$

$$(20) \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$$

$$(21) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$(22) \int_0^{\pi/2} 3^{\cos^2 x} \sin 2x dx$$

$$(23) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$$

$$(24) \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx$$

$$(25) \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^3 + 2x^2} dx$$

$$(26) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$$