

المحاضرة (١٣)

تابع : تطبيقات المشتقة

Application of the Derivative

العناصر الأساسية في المحاضرة :

- ١- خطوط التقارب بأنواعها (أفقية - رأسية - مائلة) لمنحني دالة .
- ٢- حساب النهايات باستخدام المشتقة (قاعدة لوبيتال).

خطوط التقارب لمنحني دالة :

تعريف (١١.٣.٤): خطوط التقارب Asymptotes

الخط المستقيم $y = y_0$ يسمى خطاً تقاربياً أفقياً لمنحني الدالة $y = f(x)$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0$ ، والخط المستقيم $x = x_0$ يسمى خطاً تقاربياً رأسياً لمنحني الدالة $y = f(x)$ إذا كان $f(x) \rightarrow \pm\infty$ عندما $x \rightarrow x_0 \pm$. وبصفة عامة يقال إن الخط $y = mx + c$ خطاً تقاربياً للدالة $y = f(x)$ إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + c)] = 0$$

وفي الحالة الأخيرة يمكن حساب ميل الخط التقاربي $y = mx + c$ للمنحني $y = f(x)$ بالعلاقة $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ، ويكون الجزء المقطوع c من محاور الصادات بهذا الخط هو $c = \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - mx\}$.

مثال (١٢.٣.٤): إرسم منحني الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.

الحل: من الواضح أن هذه الدالة معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ ، والدالة لازوجية ولا فردية . كما يمكن ملاحظة أن الدالة تقطع محوري الإحداثيات فقط في النقطة $(0,0)$.

بعد إجراء عملية قسمة يمكن وضع الدالة علي الصورة :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3} = \frac{x^2 - 9 + 9}{x-3} = (x+3) + \frac{9}{x-3} \quad \dots (*)$$

ولحساب الخطوط التقاربية الرأسية والأفقية :

بالنسبة للأفقية : نحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ومن العلاقة (*) فنجد أن $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-3} = \pm\infty$ ومن

ثم فإنه لا يوجد للدالة خطوط تقاربية أفقية.

وبالنسبة للرأسية: نبحث نهاية الدالة حول النقط التي تكون الدالة غير معرفة عندها. واضح أن الدالة غير معرفة عند النقطة $x = 3$ ، وعند هذه النقطة يكون :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x-3} = \infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{x-3} = -\infty$$

إذن الخط $x = 3$ خطاً تقاربياً رأسياً للدالة .

بالنسبة للخطوط التقاربية المائلة : واضح من العلاقة (*) أن الخط $y = x + 3$ خط تقاربي مائل لمنحني الدالة لأن :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 3)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9}{x-3} = 0$$

ويكون لمنحني الدالة خط تقاربي مائل وهو $y = x + 3$.

ولإكمال رسم المنحني نحسب المشتقة الأولى فيكون $y' = f'(x) = 1 - \frac{9}{(x-3)^2}$ ، ولإيجاد النقاط الحرجة

للدالة نضع $y' = 0$ وينتج من ذلك أن $1 - \frac{9}{(x-3)^2} = 0$ ، ومنها $(x-3)^2 - 9 = 0$ ، أي أن

$x^2 - 6x = 0$ وينتج أن $x = 0$ أو $x = 6$ هي النقط الحرجة للدالة. ولدراسة إطراد الدالة يمكن رسم الجدول

التالي

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < 6$	$x = 6$	$x > 6$
y'	+ve	0	-ve	غير موجودة	-ve	0	+ve
y	تزايدية	0	تناقصية	غير معرفة	تناقصية	12	تزايدية
		قيمة عظمي محلية		خط تقاربي رأسي		قيمة صغري محلية	

ولدراسة التقعر نحسب المشتقة الثانية :

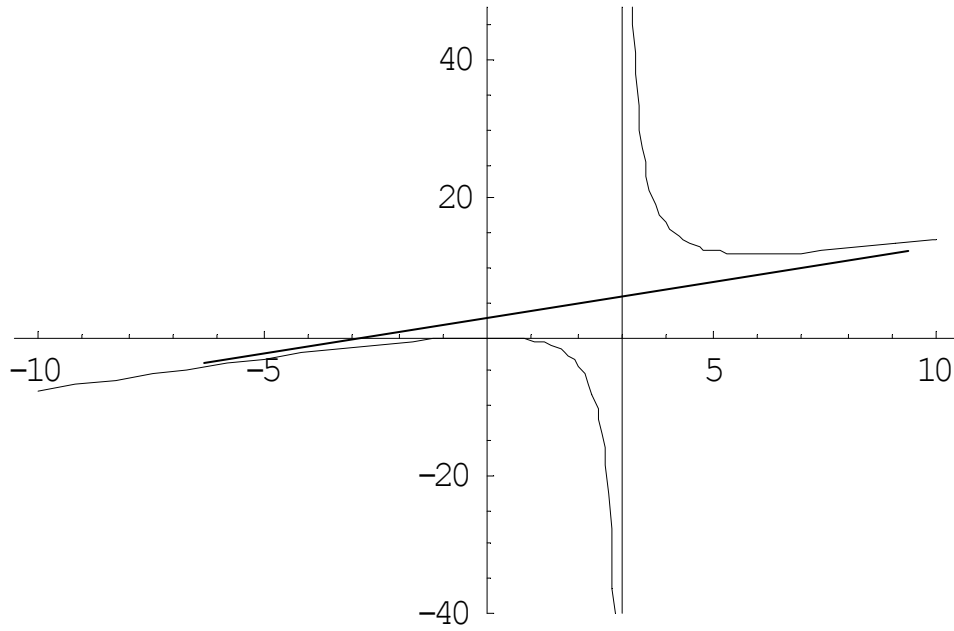
$$y'' = f''(x) = \frac{18}{(x-3)^3}$$

ويتضح من ذلك أن الدالة ليس لها نقط انقلاب لأن $f''(x) \neq 0$ ويلاحظ أنه إذا كانت $x < 3$ فتكون

$f''(x) < 0$ ويكون تقعر المنحني لأسفل بينما إذا كانت $x > 3$ فتكون $f''(x) > 0$ ويكون تقعر المنحني

لأعلى.

وما سبق يمكن استنتاج أن رسم الدالة يكون علي الصورة التالية:



$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} = (x + 3) + \frac{9}{x - 3}$$

مثال (٤.٣.١٢): إرسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

الحل:

من الواضح أن هذه الدالة زوجية ، ومعرفة على $\mathbb{R}$ ماعدا عند النقطتين ± 2 . علاوة على أنها موجبة لجميع قيم x التي تحقق المتباينة $|x| > 2$ وسالبة لقيم x بحيث $|x| < 2$ ، ويقطع المنحنى إحداثيي المحاور في النقطة $(0,0)$.

ولحساب الخطوط التقاربية الرأسية والأفقية :

بالنسبة للأفقية : نحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ فيكون $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$ ، ومن ثم فإن $y = 1$ خطاً

تقاربياً أفقياً لمنحنى الدالة ونرسمه على الرسم بالشكل المتقطع. وواضح أنه يمكن وضع الدالة علي الصورة:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 4 + 4}{x^2 - 4} = 1 + \frac{4}{x^2 - 4} \quad \dots \quad (**)$$

وبالنسبة للرأسية : نبحث نهاية الدالة حول النقط التي تكون الدالة غير معرفة عندها. واضح أن الدالة غير معرفة عند النقطتين $2, -2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty \quad \text{عند النقطة } x = 2$$

إذن $x = 2$ خطاً تقاربياً رأسياً للدالة .

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \infty \quad \text{عند النقطة } x = -2$$

إذن $x = -2$ خطأً تقاربياً رأسياً للدالة . ومن ثم فإن خطوط التقارب الرأسية هي $x = 2$ & $x = -2$.
ولإكمال رسم المنحنى نوجد المشتقة الأولى ، ونجد أن $y' = f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$ ، ولإيجاد النقاط الحرجة
للدالة نضع $y' = 0$ وينتج من ذلك أن $x = 0$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للمنحنى.

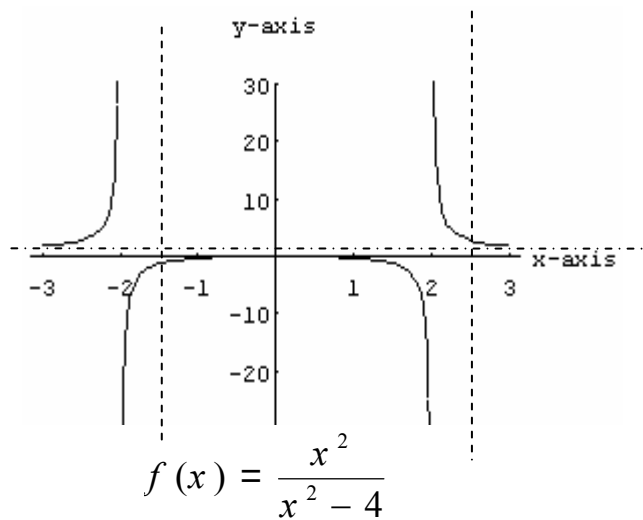
x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
y'	+ve	غير موجودة	+ve	0	-ve	غير موجودة	-ve
y	تزايدية	غير معرفة	تزايدية	0	تناقصية	غير معرفة	تناقصية
		خط تقارب رأسي		عظمى محلية		خط تقارب رأسي	

ولدراسة التقعر نحسب المشتقة الثانية :

$$y'' = f''(x) = \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 32x^2(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}$$

ويتضح من ذلك أن الدالة ليس لها نقط انقلاب لأن $f''(x) \neq 0$ ويلاحظ أنه إذا كان $|x| < 2$ فتكون $f''(x) < 0$ ويكون تقعر المنحنى لأسفل بينما إذا كانت $|x| > 2$ فتكون $f''(x) > 0$ ويكون تقعر المنحنى لأعلى.

ومما سبق يمكن استنتاج أن رسم الدالة يكون علي الصورة التالية:



ملاحظة (٤.٣.١٣): لرسم منحنى الدالة $y = f(x)$ يجب أن ندرس الآتي :

- ١ - نطاق الدالة ومداها
- ٢ - تماثل الدالة بالنسبة لكل من المحورين وكذلك بالنسبة لنقطة الأصل
- ٣ - تقاطع المنحنى مع كلا المحورين $x = 0$, $y = 0$
- ٤ - النقط الحرجة وفترات الاطّراد والقيم العظمى والصغرى المحلية
- ٥ - نقط الانقلاب وفترات التفرع
- ٦ - الخطوط التقاربية للدالة .

بند (٤) : إيجاد النهايات بواسطة المشتقات (قاعدة لوبيتال) :

Limits by Using Derivatives (L'Hospital's Rule)

علمنا من دراسة النهايات أن نهاية الدالة من الممكن أن تأخذ أحد القيم غير المعرفة (أو غير المعينة) التالية :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$$

وفي حالة أخذ نهاية الدالة أحد القيم السابقة كنا نقوم بإجراء بعض الطرق الجبرية للحصول على قيمة النهاية. قاعدة لوبيتال تعطى لنا طريقة للحصول على قيم هذه النهايات بالاستعانة باشتقاق الدوال .

نظرية (٤.٤.١) : قاعدة لوبيتال (L'Hospital's Rule)

إذا كان f, g دالتين قابلتين للاشتقاق في فترة مفتوحة I تحتوي على نقطة a وكانت الشروط التالية متحققة:

$$(i) \quad g'(x) \neq 0 \quad ; \quad \forall x \in I$$

فيما عدا ربما عند النقطة a .

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (\text{حيث } L \text{ عدد نهائي أو لانهائي})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{إذن يكون}$$

ملاحظات (٤.٤.٢) :

(١) في النظرية السابقة الشرط $x \rightarrow a$ يمكن إحلاله بـ $x \rightarrow a +$ أو $x \rightarrow a -$ إذا كانت $I =]a, b[$ أو كانت $I =]b, a[$ على الترتيب وتظل النظرية صحيحة وأيضاً عندما $x \rightarrow \infty$ أو $x \rightarrow -\infty$ تظل النظرية صحيحة في حالة الفترات اللانهائية.

(٢) قاعدة لوبيتال تناقش نهاية الدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$ عندما تأخذ النهاية القيمة غير المعينة $\frac{0}{0}$ وذلك عندما تقول x إلى a والجدير بالذكر هنا أنه يمكن تطبيق النظرية بنفس المفهوم في حالة ما إذا أخذت النهاية إحدى الصيغ غير المعينة التالية :

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{(-\infty)}{\infty}, \frac{\infty}{(-\infty)} \text{ or } \frac{(-\infty)}{(-\infty)}$$

(٣) يمكن استخدام قاعدة لوبيتال لحساب نهاية الدوال عندما تكون كمية غير معينة في إحدى الصور الآتية :

$$0 \times \infty, \infty - \infty$$

وذلك بعد تحويلها إلى إحدى الصور غير المعينة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \quad \text{مثال (٤ . ٤ . ٣) : إ حسب النهاية}$$

الحل : يمكن اعتبار الفترة $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ونلاحظ :

أولاً : نهاية البسط $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\tan x - x) = 0$ وكذلك نهاية المقام

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0$$

ثانياً : $g'(x) = 1 - \cos x \neq 0$ علي الجوار المثقوب $\{0\}$ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

ثالثاً :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - x)'}{(x - \sin x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$$

إذن يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال لنحصل على :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - x)'}{(x - \sin x)'} = 2$$

مثال (٤ . ٤ . ٤) :

إذا كانت n , a أعداداً حقيقية فاثبت باستخدام قاعدة لوبيتال أن :

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

الحل : (تحقق من أن شروط قاعدة لوبيتال متحققة في كل مرة) ونجد أن :

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{nx^{n-1}}{1} = na^{n-1}$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

ملاحظة (٥ . ٤ . ٤) : (الصيغة الغير معينة $0 \times \infty$)

إذا أخذت نهاية الدالة $h(x) = f(x) \times g(x)$ الصورة $0 \times \infty$ عندما $x \rightarrow a$ نضع $h(x)$ في إحدى الصورتين : $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ أو $\frac{g(x)}{1/f(x)}$ ليكون ناتج النهاية مُمثل بالكمية غير المعينة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$.

مثال (٦ . ٤ . ٤) : أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)(\tan^{-1} x) = 1$

الحل :

يمكن أخذ الجوار $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ للنقطة 0 ونلاحظ أن النهاية علي الصورة الغير معينة $\infty \times 0$ ويمكن وضعها علي الصورة :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)(\tan^{-1} x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{\tan x}$$

وتصبح النهاية علي الصورة الغير معينة $\frac{0}{0}$ ويمكن التحقق من أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0 \text{ وكذلك نهاية المقام } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1} x = 0$$

$$\text{ثانياً: } g'(x) = \sec^2 x \neq 0 \text{ علي الجوار } I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

ثالثاً:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan^{-1} x)'}{(\tan x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\sec^2 x} = 1$$

إذن يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال لنحصل على :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)(\tan^{-1} x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\sec^2 x} = 1$$

ملاحظة (٧ . ٤ . ٤) : (الصيغة الغير المعينة $\infty - \infty$)

إذا أخذت الدالة $h(x) = f(x) - g(x)$ الصورة $\infty - \infty$ عندما $x \rightarrow a$ نضع $h(x)$ على الصورة $h(x) = g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right)$ ونحسب النهاية .

مثال (٨ . ٤ . ٤) : إحسب قيمة النهايات التالية :

$$(i) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$$

الحل : واضح أن النهاية علي الصورة $\infty - \infty$ ويمكن وضعها علي الصورة

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

وتصبح النهاية علي الصورة الغير معينة $\frac{0}{0}$ ويمكن التحقق من أن شروط قاعدة لوبيتال متحققة علي الفترة $]0, \pi[$ وبالتالي نطبق قاعدة لوبيتال ويكون:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

الحل : واضح أن النهاية علي الصورة $\infty - \infty$ ويمكن وضعها علي الصورة

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x^2 - 1}$$

وتصبح النهاية علي الصورة الغير معينة $\frac{0}{0}$ ويمكن التحقق من أن شروط قاعدة لوبيتال متحققة علي الفترة $]0, 2[$ وبالتالي نطبق قاعدة لوبيتال ويكون:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}$$

ملاحظة (٩ . ٤ . ٤) :

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} g'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ فإننا نكرر تطبيق قاعدة لوبيتال على الدالتين

$g'(x)$ ، $f'(x)$ ، ومن ثم فإن :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

وإذا كانت المشتقات الثانية للدوال f ، g ، أصفاراً عند النقطة a فإننا نعيد تطبيق القاعدة مرة ثالثة ... وهكذا . ويتضح ذلك في المثال التالي :

مثال (١٠ . ٤ . ٤) : إحسب باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

الحل : واضح أن

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x^2 + x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + x^2 - x - 1) = 0$$

ويمكن التحقق من أن شروط قاعدة لوبيتال متحققة علي الفترة $]-2, 0[$ ويكون :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 2x - 1}$$

والنهاية علي الصورة الغير معينة $\frac{0}{0}$ ويمكن مرة ثانية التحقق من أن شروط قاعدة لوبيتال متحققة علي الفترة $]-2, 0[$ ونطبق قاعدة لوبيتال مرة ثانية ويكون :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x + 4}{6x + 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

ملاحظة (٤ . ٤ . ١١) :

إذا كانت الدالة $h(x) = (f(x))^{g(x)}$ فإن نهايتها قد تأخذ إحدى الصيغ 1^∞ أو 0^0 أو ∞^0 عندما

x تؤول إلي a ، وفي هذه الحالة بأخذ لوغاريتم الدالة $h(x)$ تتحول النهاية إلي إحدى الصور $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$.
وحيث أن الدالة اللوغاريتمية دالة متصلة فيكون

$$\lim_{x \rightarrow a} (\ln h(x)) = \ln (\lim_{x \rightarrow a} h(x))$$

وبالتالي يكون

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = e^{\lim_{x \rightarrow a} (\ln h(x))}$$

مثال (٤ . ٤ . ١٢) : احسب النهايات الآتية

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$$

الحل :

(i) بأخذ $y = x^{\sin x}$ ، فإن $\ln y = \sin x \cdot \ln x$ كمية غير معينة علي الصورة $0 \times \infty$ ونجد أن :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \cot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1 \quad \text{إذن}$$

(ii) بأخذ $y = (1+x)^{1/x}$ ، إذن $\ln y = \frac{1}{x} \ln(1+x)$ و عليه فإن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^1 = e$$

