

المحاضرة (١٢)

تابع : تطبيقات المشتقة

Application of the Derivative

العناصر الأساسية في المحاضرة :

- ١- صيغة تايلور ومتسلسلة تايلور لدالة.
- ٢- كيفية رسم منحنى دالة بعد دراسة الخصائص الأساسية للدالة (زوجية أو فردية - أطراف - قيم عظمى وصغرى - تقعر ونقط انقلاب - خطوط تقارب).

صيغة تايلور Taylor's Formula

يمكن تعميم نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة على النحو التالي:

نظرية (٤. ٢. ١٤) : إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة على الفترة $[a, b]$ ومشتقاتها حتى الرتبة $n-1$ متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنه يوجد عنصر $c \in]a, b[$ بحيث يكون

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c) \quad \dots (1)$$

ملاحظة (٤. ٢. ١٥) :

في الصيغة (1) إذا أخذنا $a \rightarrow 0$ ، $b \rightarrow x$ نحصل على

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c) \quad \dots (2)$$

حيث $0 < c < x$ وتسمى الصيغة في هذه الحالة بصيغة ماكلاورين.

على سبيل المثال إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين في الفترة $[a, b]$ وكان $0 \in]a, b[$ فإنه لكل

$$x \in]a, b[\text{ يوجد } c \in]a, b[\text{ بحيث يكون } f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(c)$$

ملاحظة (٤. ٢. ١٦) : إذا كانت الدالة f دالة قابلة للاشتقاق n مرة ومشتقاتها متصلة على الفترة I وكان $0 \in I$ وكانت مشتقتها النونية $f^{(n)}$ محدودة على هذه الفترة ، أي أنه يوجد عدد $M > 0$ بحيث يكون

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I, \text{ فإن}$$

$$\left| f(x) - \left\{ f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) \right\} \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} M \quad \dots (3)$$

مثال (٤. ٢. ١٧) : إذا كانت $f(x) = \sin x$ فإنه من المعلوم أن f قابلة للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات ، فإذا اعتبرنا $n = 9$ في الصيغة (٣) يلاحظ أن المشتقات المتتالية لهذه الدالة هي

$$\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \cos x, \dots$$

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots$$

وقيمتها عند الصفر هي
ويلاحظ أن جميع المشتقات لهذه الدالة محدودة بالعدد 1 أي أن $|f^{(n)}(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ، وينتج إذن من (٣) أن

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \right) \right| \leq \frac{|x|^9}{9!}$$

مثال (٤. ٢. ١٨) : أوجد صيغة ماكلورين للدالة $f(x) = \frac{1}{x+1}$ إذا كانت $0 < x < 1$. ثم أوجد

تقريب لهذه الدالة بكثيرة حدود من الدرجة الرابعة عندما تكون x قريبة من الصفر.

الحل : الدالة f قابلة للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات على الفترة $[0,1]$ ومشتقتها النونية هي

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}, \text{ ويكون إذن } f^{(n)}(0) = (-1)^n n! , \text{ إذن لكل } 0 < x < 1 \text{ توجد نقطة}$$

$$0 < c < x \text{ بحيث يكون}$$

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{(n-1)} x^{(n-1)} + \frac{(-1)^n x^n}{(1+c)^{n+1}}$$

في حالة $n = 4$ يكون $f(x) \cong 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ عندما x تكون قريبة قريبا كافيا من الصفر.

مثال (٤. ٢. ١٩) : أوجد صيغة ماكلورين للدالة $f(x) = \cos x$.

الحل : حيث أن الدالة $f(x) = \cos x$ قابلة للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات وأن

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \text{ فإنه يوجد عدد حقيقي } c \text{ بحيث يكون}$$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\left(c + \frac{2n+1}{2}\pi\right)$$

في حالة ما إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات عند النقطة a من الفترة I نحصل على النظرية الآتية:

نظرية (٤. ٢. ٢٠) : متسلسلة تيلور Taylor's Series

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات عند النقطة a من الفترة المفتوحة I وكان لكل

$$x \in I$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = 0, \quad a < \xi < x.$$

فإن $f(x)$ يمكن كتابتها على الصورة

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

وفي الحالة الخاصة عندما $a = 0$ يكون

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

في هذه الحالة الخاصة الأخيرة يسمى هذا التمثيل للدالة f بمتسلسلة ماكلورين Maclaurin's Series للدالة f (أو) **مفكوك ماكلورين** (Maclaurin's Expansion) للدالة f .

مثال (٢١.٢.٤): أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(x) = \cos x$.

الحل:

حيث أن الدالة $f(x) = \cos x$ قابلة للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات وأن $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ ، فإنه عند النقطة $x = 0$ يكون $f^{(n)}(0) = \cos(n\frac{\pi}{2})$ ، وحيث أن

$$|f^{(n+1)}(\xi)| = |\cos(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2})| \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = 0, 0 < \xi < x. \quad \text{وكذلك} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{، فيكون}$$

ويمكن كتابة مفكوك ماكلورين للدالة كما يلي :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$$

مثال (٢٢.٢.٤): أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(x) = \frac{1}{1-x}$ على الفترة $I =]-1, 1[$.

الحل:

الدالة f قابلة للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات على الفترة $]-1, 1[$ ومشتقتها النونية هي

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \quad \text{ويكون إذن } f^{(n)}(0) = n! \text{ ، وبالتالي فإنه لكل } -1 < x < 1 \text{ يكون}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

بند ٣ : رسم الدوال Plotting of Functions

نعلم أنه إذا كانت $f(x)$ دالة ثابتة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإن $f'(x) = 0$ ، وذلك لجميع قيم $x \in]a, b[$ ، وعكس ذلك صحيح بشرط أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق والنظرية التالية توضح ذلك .

نظرية (١.٣.٤) : إذا كانت الدالة f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $]a, b[$ ومتصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وكانت $f'(x) = 0$ لكل $x \in]a, b[$ فإن الدالة $f(x)$ تساوى مقدار ثابت على فترة تعريفها $[a, b]$.

نظرية (٢.٣.٤) : إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $]a, b[$ وكانت $f'(x) > 0$ لكل $x \in]a, b[$ فإن الدالة f تكون تزايدية في هذه الفترة . بالمثل إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل $x \in]a, b[$ فإن الدالة f تكون تناقصية على هذه الفترة.

ملاحظة (٣.٣.٤) : إذا كانت $f'(x) \geq 0$ في الفترة $]a, b[$ فإن الدالة f تكون غير تناقصية، أما إذا كانت $f'(x) \leq 0$ على الفترة $]a, b[$ فإن الدالة تكون غير تزايدية على هذه الفترة .

مثال (٤.٣.٤) : إدرس اطراد الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -1 < x \leq 0 \\ x^2 & ; 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

الحل : واضح أن

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & ; -1 < x < 0 \\ 2x & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

كما يمكن التحقق من أن $f'(0) = 0$. إذن $f'(x) \geq 0$ عند كل نقطة في الفترة $]-1, 1[$ إذن الدالة غير تناقصية.

نظرية (٤. ٣. ٥): إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متصلة على الفترة $]a, b[$ وكانت $f(x)$ قابلة للتفاضل على $]a, x_o[\cup]x_o, b[$ حيث $x_o \in]a, b[$ فإن لهذه الدالة قيمة عظمى محلية عند النقطة x_o إذا تحقق الشرط:

$$f'(x) > 0, \forall x \in]a, x_o[, \quad f'(x) < 0, \forall x \in]x_o, b[$$

وبالمثل يكون للدالة قيمة صغرى محلية عند النقطة x_o إذا تحقق الشرط:

$$f'(x) < 0, \forall x \in]a, x_o[, \quad f'(x) > 0, \forall x \in]x_o, b[$$

مثال (٤. ٣. ٦): إدرس الدالة $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ من حيث الاطراد والقيم العظمى والصغرى المحلية ، ثم ارسم منحناها.

الحل:

حيث أن الدالة كثيرة حدود فيكون نطاقها هو $\mathbb{R}$ وتكون الدالة قابلة للاشتقاق علي $\mathbb{R}$ وبحساب المشتقة الأولى نجد أن :

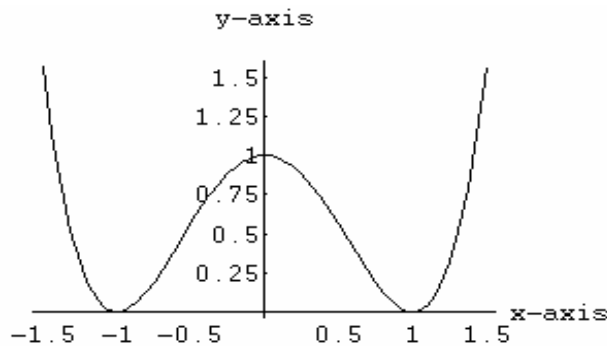
$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

وتكون النقط الحرجة للدالة هي النقط x التي تحقق أن $f'(x) = 0$ ونلاحظ أن :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ or } x = 1 \text{ or } x = -1$$

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
y'	-ve	0	+ve	0	-ve	0	+ve
y	تناقصية	0	تزايدية	1	تناقصية	0	تزايدية
		قيمة صغرى محلية		قيمة عظمى محلية		قيمة صغرى محلية	

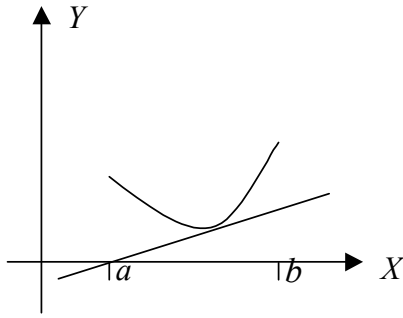
إذن منحنى الدالة f يأخذ الصورة التالية



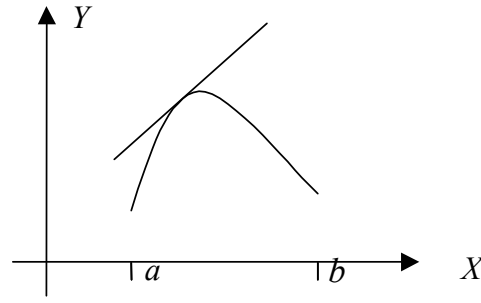
$$y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

تعريف (٧.٣.٤): (تقعر المنحنيات) (Concavity of Curves)

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للتفاضل في الفترة $]a, b[$ فيقال إن منحنى هذه الدالة مقعر إلى أعلى إذا كان منحنى هذه الدالة يقع فوق مماسه (ويقال إنه مقعر إلى أسفل إذا كان هذا المنحنى يقع تحت مماسه) في كل نقطة من الفترة $]a, b[$.



منحنى مقعر لأعلى



منحنى مقعر لأسفل

ويمكن اختبار ذلك عن طريق المشتقة ، حيث يكون منحنى الدالة $y = f(x)$ مقعر لأعلى في الفترة $]a, b[$ إذا كانت الدالة $f'(x)$ تزايدية في هذه الفترة ، ويكون منحنى الدالة $y = f(x)$ مقعر لأسفل في الفترة $]a, b[$ إذا كانت الدالة $f'(x)$ تناقصية في هذه الفترة .

نظرية (٨.٣.٤): (الشرط الكافي للتقعر) (Sufficient Condition for Concavity)

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين في الفترة $]a, b[$ وكان $f''(x) > 0$ عند كل نقطة في الفترة $]a, b[$ فإن منحنى الدالة يكون مقعراً لأعلى على هذه الفترة . وإذا كانت $f''(x) < 0$ عند كل نقطة في الفترة $]a, b[$ فإن منحنى الدالة يكون مقعراً لأسفل على هذه الفترة .

تعريف (٩.٣.٤): يقال إن النقطة $x_0 \in]a, b[$ نقطة انقلاب للدالة $y = f(x)$ إذا أمكن إيجاد جوار $U(x_0)$ للنقطة x_0 بحيث يكون منحنى الدالة f مقعراً إلى أعلى على يسار النقطة x_0 ومقعراً إلى أسفل على يمين النقطة x_0 أو العكس .

مثال (١٠.٣.٤): يرسم منحنى الدالة $y = f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5$ مع بيان فترات التقعر .

الحل: حيث أن الدالة كثيرة حدود فيكون نطاقها هو $\mathbb{R}$ وتكون الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبحساب المشتقة

$$y' = x^2 - 3x + 2$$

الأولي نجد أن :

ولإيجاد النقاط الحرجة للدالة نضع $y' = 0$ ، ونجد أن

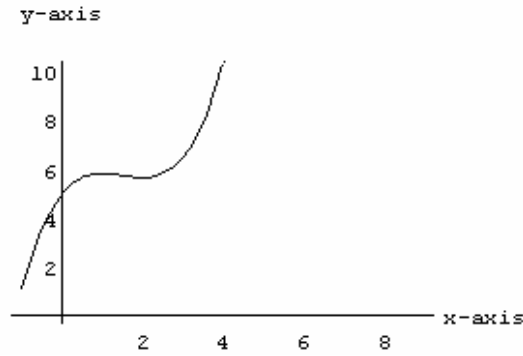
$$y' = (x - 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ or } x = 1$$

x	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
y'	+ve	0	-ve	0	+ve
y	تزايدية	35/6	تناقصية	17/3	تزايدية
		قيمة عظمى محلية		قيمة صغرى محلية	

ولدراسة التقعر نحسب المشتقة الثانية للدالة $y'' = 2x - 3$ ، ولحساب نقط الانقلاب نضع $y'' = 0$ فنجد أن $x = 3/2$.

x	$x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
y''	-ve	0	+ve
y	مقعر لأسفل	$\frac{23}{4}$	مقعر لأعلى
		نقطة انقلاب	

من المعلومات السابقة يمكن رسم المنحني كما هو موضح أدناه



$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5$$