

المحاضرة (١١)

الباب الرابع : تطبيقات المشتقة

Application of the Derivative

القيم العظمى والصغرى المحلية لدالة

The Local Maximum and Minimum

العناصر الأساسية في المحاضرة :

- ١- القيم العظمى والصغرى المحلية لدالة ونظرية فيرما.
- ٢- نظريات القيمة المتوسطة (رول - لاگرانج - كوشي).

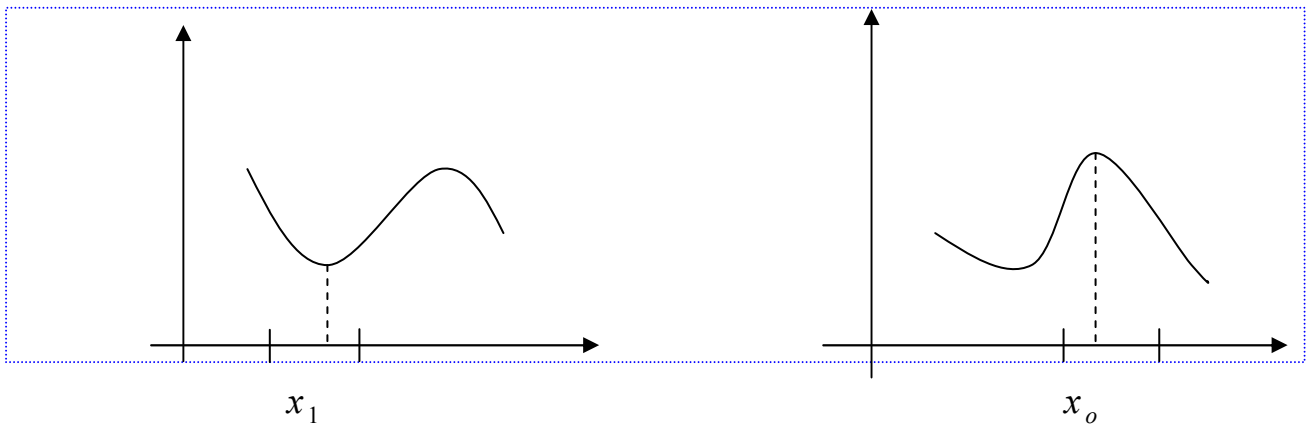
بند ١ : القيم العظمى والصغرى المحلية لدالة : The Local Maximum and Minimum

تعريف (٤. ١. ١): إذا كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة على الفترة $[a, b]$ فيقال إن هذه الدالة قيمة عظمى محلية عند نقطة $x_0 \in [a, b]$ إذا أمكن إيجاد جوار $U(x_0)$ للنقطة x_0 بحيث يكون :

$$f(x) \leq f(x_0) \quad ; \quad \forall x \in U(x_0) \cap [a, b]$$

ويقال إن هذه الدالة قيمة صغرى محلية عند نقطة $x_1 \in [a, b]$ إذا أمكن إيجاد جوار $V(x_1)$ للنقطة x_1 بحيث يكون:

$$f(x) \geq f(x_1) \quad ; \quad \forall x \in V(x_1) \cap [a, b]$$



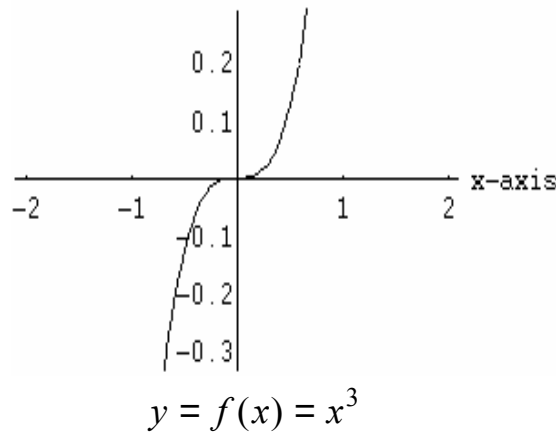
ملاحظة (٤. ١. ٢): من التعريف (٤. ١. ١) وتعريف القيم العظمى والصغرى في الباب الثاني ، يتضح أن القيمة العظمى للدالة هي قيمة عظمى محلية وكذلك القيمة الصغرى للدالة هي قيمة صغرى محلية بينما عكس ذلك ليس بالضرورة صحيحاً. بمعنى أنه قد يكون للدالة قيمة عظمى (صغرى) محلية عند نقطة x_0 ورغم ذلك $f(x_0)$ ليست هي القيمة العظمى (الصغرى) للدالة .

نظرية (٤. ١. ٣): Fermat's theorem نظرية فيرما

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق عند نقطة القيمة العظمى (الصغرى) المحلية $x_0 \in]a, b[$ فإن $f'(x_0) = 0$.

ملاحظة (٤. ١. ٤): عكس نظرية فيرما ليس بالضرورة صحيحا. بمعنى أنه إذا كانت $y = f(x)$ معرفة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق عند نقطة $x_0 \in]a, b[$ وكانت $f'(x_0) = 0$ فليس من الضروري أن تكون x_0 نقطة قيمة عظمى أو صغرى محلية للدالة f .

والمثال التالي يدل على ذلك . بأخذ $f(x) = x^3$. واضح أن هذه الدالة معرفة وقابلة للاشتقاق على الفترة $[-1, 1]$ وحيث أن $f'(x) = 3x^2$ فإن $f'(0) = 0$ في حين أن $x_0 = 0$ ليست نقطة قيمة عظمى أو صغرى محلية للدالة كما هو موضح على الرسم (تحقق من ذلك) .



مثال (٤. ١. ٥): أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية، إن وجدت، للدالة $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$ على الفترة $[-4, 4]$.

الحل:

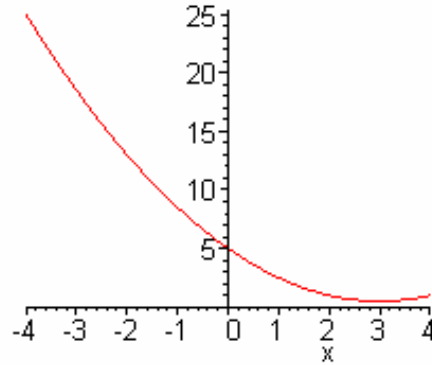
هذه الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المعطاه . إذن من نظرية فيرما نجد أن الشرط اللازم لوجود قيمة عظمى أو صغرى محلية هو تلاشي المشتقة الأولى عند تلك النقاط . وحيث أن $f'(x) = x - 3$ ، فيكون $f'(x) = 0$

عندما $x = 3$ ، وحيث أن $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{2}$ ، نجد أن

$$f(3) \leq f(x) \quad , \quad \forall x \in [-4, 4]$$

ومن ثم ينتج أن $x = 3$ نقطة قيمة صغرى محلية للدالة والقيمة الصغرى عندها هي $f(3) = \frac{1}{2}$.

وبإيجاد قيمة الدالة عند نهايتي فترة التعريف $f(4) = 1$, $f(-4) = 25$ نجد أن الدالة تأخذ قيمتها العظمى عند النقطة $x = -4$ ، بينما يكون لها قيمة عظمى محلية أخرى عند النقطة $x = 4$. أنظر رسم الدالة أدناه



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$$

ملاحظة (٤ . ١ . ٦): نظرية فيرما تعطى طريقة لإيجاد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية التي تكون الدالة عندها قابلة للاشتقاق ، ولكن قد يوجد بعض نقط القيم العظمى والصغرى المحلية والدالة ليست قابلة للاشتقاق عندها وفي هذه الحالة لا يمكن تحديدها باستخدام نظرية فيرما .

والمثال الآتي يحدد الطريقة العامة والتي تشمل نظرية فيرما لإيجاد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية.

مثال (٤ . ١ . ٧):

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك القيمتين العظمى والصغرى (إن وجدت) للدالة

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^{2/3} \text{ على الفترة } [-1, 1].$$

الحل: واضح أن $f'(x) = 1 - x^{-1/3}$ والمشتقة موجودة فقط على المجموعة $[0, 1] \cup]-1, 0[$. وبالتالي

فإن مجمل النقاط التي يُحتمل أن توجد عندها قيم عظمى أو صغرى محلية هي :

$$(١) \text{ النقاط التي تحقق المعادلة } f'(x) = 0$$

$$(٢) \text{ النقاط التي لا توجد عندها المشتقة الأولى}$$

$$(٣) \text{ نهايات فترات النطاق .}$$

ومن ثم فإن مجمل النقاط المتوقع أن يوجد عندها قيم عظمى أو صغرى محلية هي :

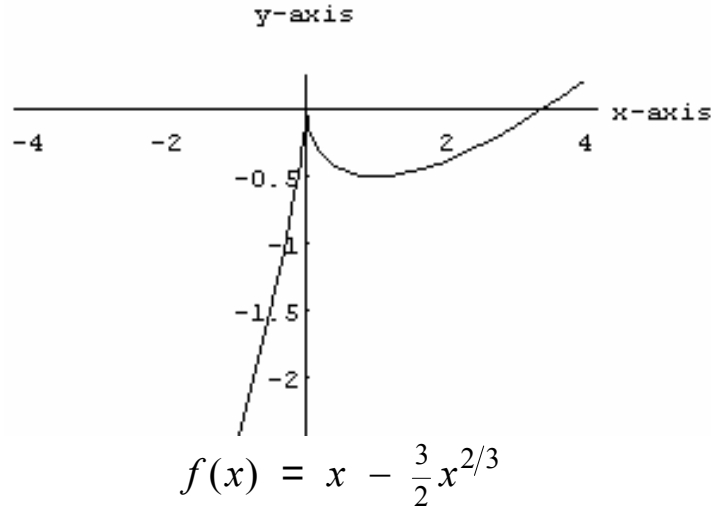
$$(١) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^{-1/3} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$(٢) \quad x = 0 \text{ حيث أن } f' \text{ غير معرفة عندها}$$

$$(٣) \text{ نهايات فترات النطاق وهي } x = 1 , x = -1$$

$$\text{الآن : } f(0) = 0 , f(-1) = -5/2 ; f(1) = -1/2$$

ونستنتج إذن أن القيم الصغرى المحلية للدالة المعطاه هي $-\frac{1}{2}$ عند النقطة $x = 1$ ، $-\frac{5}{2}$ عند النقطة $x = -1$ والقيمة العظمى المحلية لها هي الصفر عند $x = 0$. وبالتالي فإن القيمة العظمى للدالة على الفترة $[-1, 1]$ هي الصفر عند $x = 0$ والقيمة الصغرى هي $-\frac{5}{2}$ عند $x = -1$. أنظر رسم الدالة أدناه



تعريف (٤. ١. ٨): يقال إن النقطة $x_o \in D_f$ نقطة حرجة (Critical Point) للدالة f إذا كان $f'(x_o) = 0$ أو $f'(x_o)$ غير موجودة.

مثال (٤. ١. ٩): أوجد النقاط الحرجة للدالة $f(x) = \sin x$ على $\mathbb{R}$.

الحل:

المشتقة الأولى للدالة هي $f'(x) = \cos x$ موجودة على كل $\mathbb{R}$. وبالتالي فإن النقاط الحرجة للدالة تنتج فقط من وضع $f'(x) = 0$ أي أن

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2n+1}{2}\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

إذن مجموعة النقاط الحرجة للدالة $f(x) = \sin x$ هي :

$$A = \left\{ n\pi + \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

بند ٢ : نظريات القيمة المتوسطة : Mean Value Theorems

نظرية (٤. ٢. ١): (Rolle's Theorem) نظرية رول

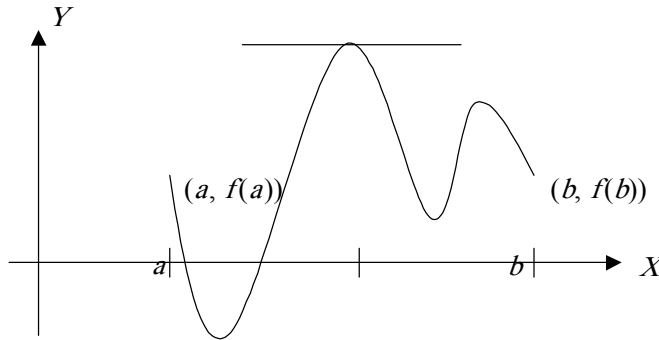
إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للتفاضل على الفترة المفتوحة $]a, b[$ وكان $f(a) = f(b)$ فإنه يوجد نقطة $\xi \in]a, b[$ بحيث أن $f'(\xi) = 0$.

البرهان : أولا حيث أن $f(a) = f(b)$ ، فمن المحتمل أن تكون الدالة ثابتة ، أى أن $f(x) = c$ ، $\forall x \in [a, b]$ ، حيث c مقدار ثابت ، ومن ثم $f'(x) = 0$ على الفترة $]a, b[$. أى أن أى نقطة $\xi \in]a, b[$ تحقق المطلوب.

ثانيا : فى حالة ما إذا كانت الدالة غير ثابتة، وحيث أنها متصلة على فترة مغلقة، إذن من نظرية (٣٠. ٣. ٢) يوجد $\xi, \eta \in [a, b]$ بحيث يكون $f(\eta) = \min f$ ، $f(\xi) = \max f$ ، وحيث أن الدالة f ليست ثابتة فإن إحدى القيمتين $f(\eta)$ ، $f(\xi)$ (على الأقل) لا تساوى $f(a)$. إذن بفرض أن $f(\xi) \neq f(a)$ فإن $\xi \in]a, b[$ ومن نظرية فيرما يكون $f'(\xi) = 0$.

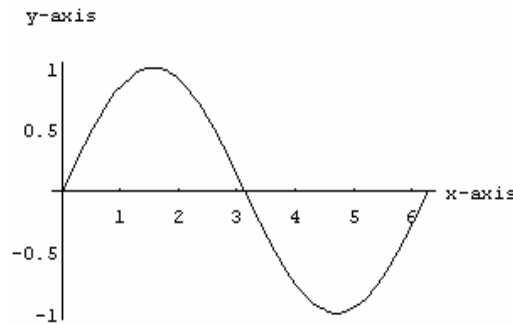
ملاحظة (٢. ٢. ٤): (المعنى الهندسى لنظرية رول) (Geometric Meaning of Rolle's Theorem)

إذا كان منحنى الدالة متصل وطرفاه يقعان على مستقيم يوازي محور السينات كما هو موضح على الشكل عند النقطتين $(a, f(a))$ ، $(b, f(b))$ وكان للمنحنى مماس عند جميع نقاطه باستثناء طرفيه فإنه توجد نقطة واحدة على الأقل على المنحنى يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات.



مثال (٣. ٢. ٤): حقق نظرية رول للدالة $f(x) = \sin x$ على الفترة $[0, 2\pi]$.

الحل:



$$y = f(x) = \sin x$$

حيث أن $f(x) = \sin x$ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق لجميع قيم x . إذن فهي متصلة على الفترة $[0, 2\pi]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $]0, 2\pi[$ وحيث أن $f(0) = f(2\pi) = 0$ إذن الدالة تحقق فرضيات نظرية رول

ومن ثم فإنه يوجد على الأقل نقطة $0, 2\pi] \in \xi$ بحيث يكون $f'(\xi) = 0$ وحيث أن $f'(x) = \cos x$ ، إذن بوضع $\cos \xi = 0$. نجد أن $\xi = \frac{3\pi}{2}$ ، $\xi = \frac{\pi}{2}$.

مثال (٤. ٢. ٤): حقق نظرية رول للدالة $f(x) = x(x-3)$ على الفترة $[0,3]$.

الحل: واضح أن الدالة المعطاه متصلة وقابلة للاشتقاق لجميع قيم x ، وأيضا $f(0) = f(3) = 0$. إذن الدالة تحقق فرضيات نظرية رول على الفترة $[0,3]$ وبالتالي فإنه يوجد على الأقل نقطة $0, 3] \in \xi$ بحيث يكون $f'(\xi) = 0$. وحيث أن $f'(x) = 2x-3$ إذن بوضع $f'(\xi) = 0$ نجد أن $\xi = \frac{3}{2} \in]0, 3[$.

نظرية (٤. ٢. ٥): (نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة) (Lagrange's Theorem)

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة

$$[a, b] \text{ فإنه يوجد على الأقل نقطة } \xi \in]a, b[\text{ بحيث أن } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

ملاحظة (٤. ٢. ٦): إذا كانت الدالة $y = f(x)$ تحقق فرضيات نظرية القيمة المتوسطة فإن

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi)$$

حيث $a < \xi < b$. إذن عندما تكون b قريبة قريبا كافيا من a فإن ξ تكون قريبة من a ومن ثم نحصل على التقريب الآتي $f(b) \cong f(a) + (b-a) f'(a)$.

مثال (٤. ٢. ٧): حقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^3$ على الفترة $[1,3]$.

الحل: من الواضح أن الدالة المعطاه تحقق فرضيات نظرية القيمة المتوسطة. ومن ثم نبحث عن نقطة ξ في الفترة $[1,3]$ تحقق الشرط $f(3) - f(1) = (3-1) f'(\xi)$. أي أن

$$3^3 - 1^3 = (3-1)(3\xi^2) \Rightarrow 26 = 6\xi^2 \Rightarrow \xi = \pm \sqrt{13/3}$$

وحيث أن القيمة السالبة لا تقع داخل الفترة $[1,3]$ ، فإن قيمة ξ المطلوبة هي: $\xi = \sqrt{13/3}$.

مثال (٤. ٢. ٨): هل يمكن تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = |x|$ في الفترة $[-2,2]$.

الحل: واضح أن الدالة متصلة على الفترة المغلقة $[-2,2]$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = 0$ ومن ثم لا تتحقق فرضيات نظرية القيمة المتوسطة لكونها غير قابلة للاشتقاق على كل الفترة $[-2,2]$.

مثال (٤. ٢. ٩): أوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{10}$ مقربة إلى رقمين عشريين مستخدما نظرية القيمة المتوسطة.

الحل: إعتبر الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة $[9,10]$. من ملاحظة (٤. ٢. ٦) نجد أن

$$f(10) \cong f(9) + (10-9) f'(9)$$

$$\text{ولكن } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ويكون إذن } \sqrt{10} \cong 3 + 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{1}{6} \cong 3.17$$

مثال (١٠ . ٢ . ٤):

إذا كان a, n عددين حقيقيين وكان $n > 1, x > 1$ ، فبرهن أن :

$$a^n - 1 > n(a - 1)$$

الحل:

إعتبر الدالة $f(x) = x^n$ على الفترة $[1, a]$. يلاحظ أن هذه الدالة متصلة على الفترة المغلقة $[1, a]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $]1, a[$. إذن الدالة f تحقق نظرية القيمة المتوسطة ويوجد $\xi \in]1, a[$ بحيث يكون :

$$f(a) - f(1) = (a - 1)f'(\xi) = (a - 1)(n\xi^{n-1})$$

وحيث أن $\xi > 1, n > 1$ فإن $n\xi^{n-1} > n$ ، وبالتالي

$$a^n - 1 = (a - 1)(n\xi^{n-1}) > n(a - 1)$$

أى أن $a^n - 1 > n(a - 1)$.

مثال (١١ . ٢ . ٤): إذا كان $a < b$ فبرهن أن $\tan^{-1} b - \tan^{-1} a < b - a$.

الحل:

إعتبر الدالة $f(x) = \tan^{-1} x$ هذه الدالة قابلة للاشتقاق لجميع قيم x الحقيقية ومشتقتها هي $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. إذن بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على هذه الدالة في الفترة $[a, b]$ ، نجد أنه يوجد نقطة $\xi \in]a, b[$ بحيث يكون :

$$\tan^{-1} b - \tan^{-1} a = (b - a) \left(\frac{1}{\xi^2 + 1} \right)$$

ولكن $1 + \xi^2 > 1$ إذن $\frac{1}{1 + \xi^2} < 1$ ، وبالتالي يكون $\tan^{-1} b - \tan^{-1} a < b - a$.

نظرية (١٢ . ٢ . ٤): (نظرية كوشى للقيمة المتوسطة) (Cauchy's Theorem for the Mean Value)

إذا كانت f, g دالتين متصلتين على الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلتان للاشتقاق على الفترة المفتوحة $]a, b[$ وكانت $g'(x) \neq 0$ على الفترة $]a, b[$ فإنه يوجد نقطة ξ (على الأقل) في الفترة $]a, b[$ تحقق:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

مثال (١٣ . ٢ . ٤): حقق نظرية كوشى للقيمة المتوسطة للدالتين $f(x) = x, g(x) = 1 + x^2$ على الفترة $[0, 2]$.

الحل: حيث أن الدالتين f , g تحققان شروط نظرية كوشي للقيمة المتوسطة على الفترة $[0,2]$ (تحقق من ذلك)، إذن يوجد $\xi \in]0, 2[$ بحيث يكون :

$$\frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{1}{2\xi}$$

أى أن

$$\frac{2 - 0}{5 - 1} = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow \xi = 1$$

=====

=====

=====